Алгебра и начала анализа

10-11



Алгебра
и начала анализа

учебник для

10-11 классов

общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской
Федерации

15-е издание

Москва
• Просвещение •
2007

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ш. А. Алимов
Ю. М. Колягин
Ю. В. Сидоров
Н. Е. Федорова
М. И. Шабунин

Издание подготовлено под научным руководством **академика А. Н. Тихонова**

Учебник занял третье место на Всесоюзном конкурсе учебников для средней школы

Условные обозначения в учебнике

▮	выделение основного материала
▩	текст, который важно знать и полезно помнить (не обязательно наизусть)
▶	начало решения задачи
◁	окончание решения задачи
●	начало обоснования утверждения или вывода формулы
○	окончание обоснования или вывода
*	дополнительный более сложный материал
▢	обязательные задачи
▢	дополнительные более сложные задачи
▢	трудные задачи

Алгебра и начала анализа : учеб. для 10—11 кл. общеобразоват. учреждений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.]. — 15-е изд. — М. : Просвещение, 2007. — 384 с. : ил. — ISBN 978-5-09-017284-4.
А45

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72 + 22.161я72

ISBN 978-5-09-017284-4

I

глава

Действительные числа

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров

Целые и рациональные числа

 1

Изучение математики вы начали с натуральных чисел, т. е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5, ... При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

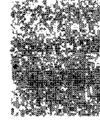
Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами (т. е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т. е. чисел 0, ±1, ±2, ±3, ... При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

Введение рациональных чисел, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, позволило находить частное двух рациональных чисел при условии, что делитель не равен нулю. Каждое целое число m также является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.

При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Если рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{10^k}$, где m — целое число, k — натуральное число, то его можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например, число $\frac{327}{100}$ можно записать так: 3,27; число $-\frac{23}{10}$ можно записать так: −2,3.

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{3}{7}$. Если, например, попытаться записать число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби, используя известный алгоритм деления уголком, то получится бесконечная десятичная дробь 0,3333... . Бесконечную десятичную дробь 0,3333... называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 — ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333... коротко записывают так: 0,(3); читается: «Ноль целых и три в периоде».



Вообще, периодическая дробь — это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр — период дроби.

Например, десятичная дробь

$$23{,}14565656... = 23{,}14(56)$$

периодическая с периодом 56; читается «23 целых, 14 сотых и 56 в периоде».

Задача 1 Записать число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

▶ Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -27 & 11 \\ 22 & 2{,}4545... \\ \hline -50 & \\ 44 & \\ \hline -60 & \\ 55 & \\ \hline -50 & \\ 44 & \\ \hline 6... & \end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Следовательно, $\frac{27}{11} = 2{,}4545... = 2{,}(45)$. ◁

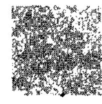
Вообще, при делении целого числа m на натуральное число n на некотором шаге остаток может стать равным нулю или остатки начинают повторяться, так как каждый из остатков меньше n. Тогда начинают повторяться и цифры частного.

В первом случае в результате деления получается целое число или конечная десятичная дробь, во втором случае — бесконечная десятичная периодическая дробь. Например:

$$\frac{360}{15} = 24, \quad \frac{15}{4} = 3{,}75, \quad \frac{29}{9} = 3{,}222... = 3{,}(2).$$

Заметим, что каждое целое число или конечную десятичную дробь можно считать и бесконечной десятичной периодической дробью с периодом, равным нулю. Например:

$27 = 27{,}000... = 27{,}(0), \quad 3{,}74 = 3{,}74000... = 3{,}74(0).$



Итак, каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Справедливо и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, так как может быть представлена в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число.

Задача 2 Представить бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(18) в виде обыкновенной.

▶ Пусть $x = 0{,}2(18) = 0{,}2181818...$. Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$$10x = 2{,}181818... . \qquad (1)$$

Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим

$$1000x = 218{,}181818... . \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $990x = 216$. Отсюда $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$. ◁

Задача 3 Показать, что $2,999... = 3$.

▶ Пусть $x = 2,(9)$. Тогда $10x = 29,(9)$, откуда $9x = 27$, $x = 3$. ◁

Аналогично можно показать, что любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной дроби двумя способами: с периодом 0 и с периодом 9. Например,

$$1,75 = 1,75000... = 1,74999...,$$
$$-0,2 = -0,2000... = -0,199999... .$$

Условимся в дальнейшем не использовать бесконечные десятичные дроби с периодом 9. Вместо таких дробей будем записывать конечные десятичные дроби или бесконечные десятичные дроби с периодом 0. Например,

$$5,2999... = 5,30000... = 5,3.$$

Упражнения

1 Записать в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{8}{11}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $-8\frac{2}{7}$; 6) $\frac{13}{99}$.

2 Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}$; 2) $\frac{8}{13}+\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}+1,25$;

4) $\frac{1}{6}+0,33$; 5) $\frac{3}{14}\cdot 1,05$; 6) $\frac{7}{9}\cdot 1,7$.

3 Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

1) $0,(6)$; 2) $1,(55)$; 3) $0,1(2)$;

4) $-0,(8)$; 5) $-3,(27)$; 6) $-2,3(82)$.

4 Вычислить:

1) $(20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95)$;

2) $\frac{7}{36}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}$.

5 Вычислить:

1) $\left(3\frac{4}{25}+0,24\right)2,15+\left(5,1625-2\frac{3}{16}\right)\frac{2}{5}$;

2) $0,364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0,125+2\frac{1}{2}\cdot 0,8$.



§ 2 Действительные числа

В § 1 было показано, что любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби и каждая бесконечная десятичная периодическая дробь является рациональным числом. Если же бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и, вообще, после n-й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом*.

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Иррациональные числа, как и рациональные, могут быть положительными и отрицательными. Например, число 0,123456..., в котором после запятой записаны подряд все натуральные числа, является положительным иррациональным числом. Число –5,246810..., в котором после запятой записаны подряд все четные числа, является отрицательным иррациональным числом.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt[3]{3}$, π также являются иррациональными, так как можно доказать, что они могут быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество *действительных чисел*.

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т. е. дробь вида

$$+a_0,a_1a_2a_3 \ldots \text{ или } -a_0,a_1a_2a_3 \ldots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а каждая из букв a_1, a_2, ... — это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например:

1) в записи действительного числа $\pi = 3{,}1415...$ число $a_0 = 3$, а первые четыре десятичных знака таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$;

2) в записи действительного числа $-\sqrt{234} = -15{,}297058...$ число $a_0 = 15$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 7$, $a_4 = 0$ и т. д.;

3) в записи действительного числа $37{,}19 = 37{,}19000...$ число $a_0 = 37$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_n = 0$ при $n \geqslant 3$.

Действительное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Бесконечная десятичная дробь равна нулю, если все цифры в ее записи — нули. Положительное действительное число — это десятичная дробь, не равная нулю, со знаком «+», а отрицательное — со знаком «–». Знак «+» перед дробью обычно опускается.

Вам известно, как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т. е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями. Например, вычислим приближенные значения $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135..., \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508... .$$

Поэтому с точностью до единицы

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1 \approx 3,$$

с точностью до одной десятой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14 \approx 3{,}1,$$

с точностью до одной сотой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \approx 3{,}15$$

и т. д.

Числа 3; 3,1; 3,15 и т. д. являются последовательными приближениями значения суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Итак, выполняя сложение $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ заменялись их приближениями — рациональными числами, и выполнялось сложение чисел по известным правилам.

Аналогично, вычисляя произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, например, с точностью до 0,1, получаем

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}41 \cdot 1{,}73 = 2{,}4393 \approx 2{,}4.$$

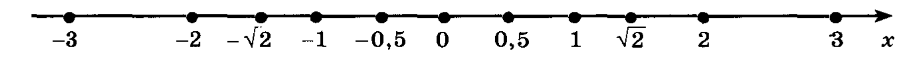


Рис. 1

Вообще, пусть x_1, x_2, ..., x_n, ... — последовательные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда погрешность приближения $|x - x_n|$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут

$$|x - x_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} |x - x_n| = 0$$

(читается: «$|x - x_n|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности» или «предел $|x - x_n|$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Это означает, что x_n как угодно близко приближается к x, т. е.

$$x_n \to x \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Отметим, что все основные действия над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения, правила раскрытия скобок и т. д.).

Модуль действительного числа x **обозначается** $|x|$ **и определяется так же, как и модуль рационального числа:**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, если $x = -0{,}1010010001...$, то $|x| = -x = 0{,}1010010001...$.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой прямой (рис. 1).

Покажем, например, как можно геометрически указать на числовой прямой точку с координатой $\sqrt{2}$. Построим квадрат со стороной 1 (рис. 2) и с помощью циркуля отложим диагональ OA на числовой оси.

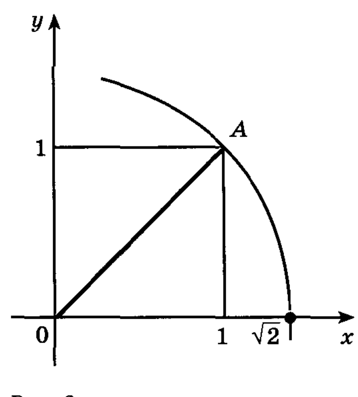


Рис. 2

Заметим, что если бы не было иррациональных чисел и соответствующих им точек числовой оси, то прямая

оказалась бы с «дырками», в частности, не было бы на числовой оси точки с координатой $\sqrt{2}$.

Множество действительных чисел «заполняет» всю числовую прямую: каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число. Точку, изображающую число a, также обозначают буквой a. Отметим, что если $a < b$, то точка a лежит левее точки b.

Множество всех действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Запись $x \in \boldsymbol{R}$ (читается: «x принадлежит $\boldsymbol{R}$») означает, что x является действительным числом.

Упражнения

6 (Устно.) Какие из данных десятичных дробей являются иррациональными числами:
1) 16,9; 2) 7,25(4);
3) 1,21221222... (после n-й единицы стоит n двоек);
4) 99,1357911... (после запятой записаны подряд все нечетные числа)?

7 Установить, какая из пар чисел 5,4 и 5,5 или 5,5 и 5,6 образует десятичные приближения числа $\sqrt{31}$ с недостатком и с избытком.

8 Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:
1) $x = 5 - \sqrt{7}$; 2) $x = 4 - 3\sqrt{3}$; 3) $x = 5 - \sqrt{10}$?

9 Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:
1) $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3})$;
3) $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2}$; 4) $(5\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{3}$;
5) $(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2$; 6) $(\sqrt{5} - 1)^2 - (2\sqrt{5} + 1)^2$.

10 Вычислить:
1) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28}$; 2) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{50} : \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{12} : \sqrt{27}$.

11 Сравнить числовые значения выражений:
1) $\sqrt{3,9} + \sqrt{8}$ и $\sqrt{1,1} + \sqrt{17}$; 2) $\sqrt{11} - \sqrt{2,1}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3,1}$.

12 Вычислить:
1) $\sqrt{(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} + \sqrt{7}) \cdot 3}$;
3) $\sqrt{(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}) \cdot 2 + 7}$.

§ 3 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Напомним: геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, что для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n q$, где $b_n \neq 0$, $q \neq 0$.

Например, таковы последовательности:

$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots \quad (b_1 = 1,\ q = 3)$;

$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots, \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \ldots \quad \left(b_1 = 1,\ q = \frac{1}{5}\right)$;

$2, -4, 8, -16, \ldots, -(-2)^n, \ldots \quad (b_1 = 2,\ q = -2)$.

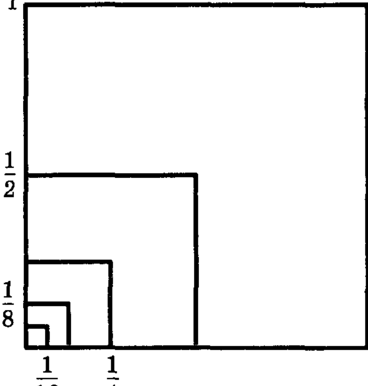
По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ вычисляется n-й член геометрической прогрессии.

По формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ вычисляется сумма ее первых n членов, если $q \neq 1$, а если $q = 1$, то $S_n = b_1 n$.

Среди геометрических прогрессий особый интерес представляют так называемые *бесконечно убывающие геометрические прогрессии*.

Начнем с примера. Рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 3. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего $\frac{1}{2^2}$ и т. д.

Рис. 3



Таким образом, стороны квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots . \quad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots . \quad (2)$$

Из рисунка 3 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому каждая из прогрессий (1) и (2) называется *бесконечно убывающей*.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ \ldots .$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$, а ее члены $b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{3},\ b_3 = \frac{1}{9},\ b_4 = -\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Эту прогрессию также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

Задача 1 Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

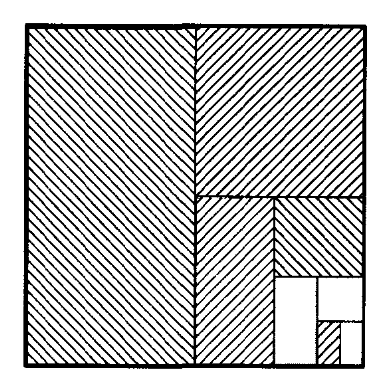
▶ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$.

Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ◁

На рисунке 4 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots .$$

Рис. 4



Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т. е.

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$.

Бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ считают равной 1.

Итак, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots .$$

Например, для прогрессии

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots,$$

где $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, имеем

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \ldots,$$

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots .$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Выведем *формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии* с помощью формулы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Запишем ее так:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n. \qquad (3)$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_1}{1-q} q^n = 0$, и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнем, что это равенство справедливо при $|q| < 1$, в частности при $q = 0$.

Задача 2 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots .$$

▶ Так как $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$. ◁

Задача 3 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$.

▶ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$, при $n = 3$ получаем

$$-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}, \quad -1 = b_1 \cdot \frac{1}{49},$$

откуда $b_1 = -49$. По формуле (4) находим $S = \frac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 Пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a = 0{,}(15) = 0{,}151515...$ в виде обыкновенной дроби.

▶ Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0{,}15 = \frac{15}{100}, \quad a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$
$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}, \quad \ldots .$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \ldots$.

По формуле (3) получаем $a = \dfrac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$. ◁

Упражнения

13 Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой *n*-го члена:

1) $b_n = -5^{2n}$; 2) $b_n = 2^{3n}$?

14 В геометрической прогрессии найти сумму ее первых пяти членов, если:

1) $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) $b_1 = 11$, $b_4 = 88$.

15 Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$;

3) $-27, -9, -3, \ldots$; 4) $-64, -32, -16, \ldots$.

16 Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$; 4) $b_5 = 9$, $b_{10} = -\frac{1}{27}$.

17 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} (0{,}2)^n$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7^n}\right)$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right)$.

18 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = -\frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{8}$; 2) $q = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{81}$;

3) $q = -\frac{1}{3},\ b_1 = 9$; 4) $q = -\frac{1}{2},\ b_4 = \frac{1}{8}$.

19 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6,\ 1,\ \frac{1}{6},\ \ldots$; 2) $-25,\ -5,\ -1,\ \ldots$.

20 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(8); 3) 0,(32); 4) 0,2(5).

21 Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -5 \cdot 4^n$;

3) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

22 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2},\ b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b_4 = \frac{9}{8}$.

23 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 30. Найти:

1) b_1, если $q = \frac{1}{5}$; 2) q, если $b_1 = 20$.

24 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 - 2^n}{2^n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^{n-2} - 2}{3^n}$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(5^n + 1)^2}{5^{2n}}$.

25 На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 5). Найти высоту получившейся фигуры.

26 В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 6). Радиус первой окружности

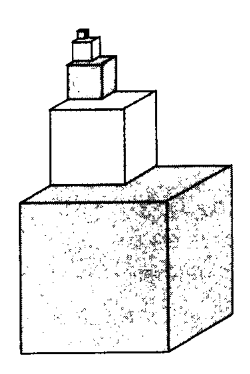


Рис. 5

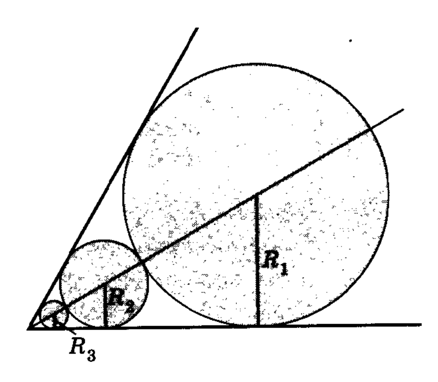


Рис. 6

равен R_1. Найти радиусы R_2, R_3, ..., R_n, ... остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1 + 2\,(R_2 + R_3 + \ldots + R_n + \ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.



§ 4 Арифметический корень натуральной степени

Задача 1 Решить уравнение $x^4 = 81$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^4 - 81 = 0$, или $(x^2 - 9)\,(x^2 + 9) = 0$.

Так как $x^2 + 9 \neq 0$, то $x^2 - 9 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. ◁

Итак, уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Их называют корнями четвертой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим корнем четвертой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n = a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение. ***Арифметическим корнем*** **натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным выражением*. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что корень n-й степени $\sqrt[n]{a}$ ($a \geqslant 0$) равен b, нужно показать, что: 1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$, а также $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

Задача 2 Решить уравнение $x^3 = 8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 - 8 = 0$, или

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0, \quad (x - 2)((x + 1)^2 + 3) = 0.$$

Так как $(x + 1)^2 + 3 \neq 0$, то $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. ◁

Итак, уравнение $x^3 = 8$ имеет один действительный корень $x = 2$. Так как $2 > 0$, то это число — арифметический корень из 8, т. е. $\sqrt[3]{8} = 2$.

Задача 3 Решить уравнение $x^3 = -8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 + 8 = 0$, или

$$(x + 2)(x_2 - 2x + 4) = 0, \quad (x + 2)((x - 1)^2 + 3) = 0.$$

Так как $(x-1)^2+3 \neq 0$, то $x+2=0$, откуда $x=-2$. ◁

Итак, уравнение $x^3=-8$ имеет один действительный корень $x=-2$. Так как $-2<0$, то число -2 является корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Число -2 называют *корнем кубическим из числа* -8 и обозначают $\sqrt[3]{-8}$:

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Вообще, для любого нечетного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1}=a$ при $a<0$ имеет только один корень, причем отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечетной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a=|a|$ следующим равенством:

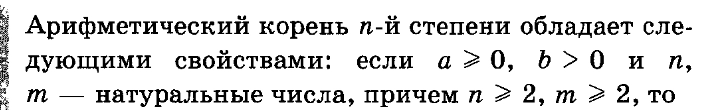
$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Задача 4 Вычислить

$\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}$.

▶ $\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}=\sqrt[3]{-(0{,}3)^3}-\sqrt[4]{(0{,}2)^4}-\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[7]{-2^7}=-0{,}3-0{,}2-3+2=-1{,}5.$ ◁



Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a \geqslant 0$, $b>0$ и n, m — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Отметим, что в свойстве 1 число b может также быть равным 0; в свойстве 3 число m может быть целым, если $a>0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

2) $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n =$
$= (\sqrt[n]{a})^n\,(\sqrt[n]{b})^n = ab$. ○

Аналогично доказываются и остальные свойства. Приведем примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\,\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{256}{625} : \dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$;

3) $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$;

5) $(\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$.

Задача 5 Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

▶ Используя свойства арифметического корня, получаем $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}} = \dfrac{a^3b^2}{a^2b} = ab$. ◁

Отметим еще одно свойство арифметического корня четной степени.

При любом значении a справедливо равенство $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, где k — натуральное число.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $|a| \geqslant 0$ по определению модуля;

2) $|a|^{2k} = a^{2k}$, так как $|a|^2 = a^2$. ○

Задача 6 Упростить выражение $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6}$, если $3 < x < 5$.

▶ $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = |x-5| + |x-3|$. Так как $3 < x < 5$, то $|x-5| = -(x-5) = 5-x$, $|x-3| = x-3$. Поэтому $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = 5 - x + x - 3 = 2$. ◁

Упражнения

27 (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвертой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{18}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить (**28—30**).

28 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

29 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

30 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

31 Решить уравнение:

1) $x^4 = 256$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

Вычислить (**32—36**).

32 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32} - 0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0{,}001} - \sqrt[4]{0{,}0016}$.

33 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$; 3) $\sqrt[5]{32 \cdot 100\,000}$.

34 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5 \cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7}$.

35 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.

36 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$;

3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

37[1] Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

38 Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить (39—40).

39 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

40 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{25}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

41 Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (42—43).

42 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

43 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

44 Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

45 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[6]{x-3}$; 3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (46—47).

46 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

47 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; 6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (**48—49**).

48 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$.

49 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$; 4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

50 Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; 3) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

51 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$;

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$;

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

52 Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$; 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$;

53 Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

54 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

Степень с рациональным и действительным показателями



§ 5

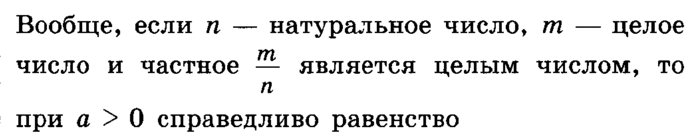
1. Степень с рациональным показателем.

Задача 1 Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

▶ Так как $5^{12} = (5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ◁

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$ или $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$, так как $3 = \frac{12}{4}$.

Точно так же можно записать, что $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$.



Вообще, если n — натуральное число, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

● По условию $\frac{m}{n} = k$ — целое число, откуда $m = nk$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \ \bigcirc$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, формула (1) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$. Например:

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$

$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$

$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$

Напомним, что рациональное число r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Тогда по формуле (1) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя r и любого положительного основания a.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причем $\sqrt[n]{0^m} = 0$.

Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулой (1), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где n и k — натуральные числа, m — целое число, то при любом $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}. \qquad (2)$$

Например, $8^{\frac{5}{15}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$.

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

А именно, для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$. 2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.

3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$. 4. $(ab)^p = a^p b^p$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Эти свойства получаются из свойств корней. Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

● Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \ \bigcirc$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$

Задача 2 Вычислить $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

▶ $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5.$ ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}} b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

▶ $\frac{a^{\frac{4}{3}} b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$ ◁

Задача 4 Упростить выражение $\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

▶ $\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$
$=1+a-(1-a)=2a.$ ◁

Задача 5* Вкладчик поместил в банк 1000 р. Банк ежегодно выплачивает вкладчику 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев?

▶ Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов:

$$S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

где a — первоначальная сумма денег, p — число процентов, начисляемых банком в год, t — число лет, в течение которых деньги находились в банке. В данной задаче $a=1000$, $p=3$, $t=3\frac{5}{12}$. По формуле сложных процентов находим $S=1000\cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}$. Вычисления можно провести на микрокалькуляторе. Например, на МК-51 это можно сделать по программе

5 [÷] 12 [+] 3 [=] [$x\to П$] [C] 1,03
[y^x] [$П\to x$] [=] [×] 1000 [=] 1106,2684.

Ответ 1106 р. 27 к. ◁

2. Степень с действительным показателем.

Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем на примере $3^{\sqrt{2}}$.
Пусть r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r_1=1{,}4,\ r_2=1{,}41,\ r_3=1{,}414,\ \ldots .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\sqrt{2}$.

Числа r_1, r_2, r_3, ... являются рациональными, и для них определены степени 3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, ..., т. е. определена последовательность

$$3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ \dots .$$

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т. е. $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{r_n}$.

Вообще, пусть $a > 0$ и x — произвольное иррациональное число. Рассмотрим последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... десятичных приближений числа x. Эта последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Можно показать, что последовательность a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}, ... также имеет предел. Этот предел обозначают a^x и называют степенью числа a с показателем x.

Таким образом, степень a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x.

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом:

$$a^x > 0 \text{ при } x \in R,\ a > 0.$$

Если основание степени $a = 0$, то степень 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^{0,1} = 0$. При $x \leqslant 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\sqrt{2}}$ смысла не имеют.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Доказательство этих свойств для степени с действительным показателем проводится в курсе высшей математики.

Задача 6 Упростить выражение $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

▶ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \ \triangleleft$$

Приведем еще одно свойство степени, также доказываемое в курсе высшей математики с помощью теории пределов.

Для любого $a > 1$ и любого $x > 0$ число a^x больше 1, т. е. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$. (1)

С помощью свойств степени с действительным показателем доказывается следующая теорема:

Теорема. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.

● По условию $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому по доказанному свойству (1) имеем $a^{x_2 - x_1} > 1$. Умножив обе части этого равенства на положительное число a^{x_1}, получим $a^{x_1} a^{x_2 - x_1} > a^{x_1}$.

Отсюда по свойству умножения степеней получаем $a^{x_2} > a^{x_1}$, т. е. $a^{x_1} < a^{x_2}$. ○

Следствие 1. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} > a^{x_2}$.

● Так как $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому из теоремы следует, что при $x_1 < x_2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}.$$

По свойству деления степеней $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$. Следовательно, $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$, откуда $a^{x_1} > a^{x_2}$. ○

Следствие 2. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

● Предположим, что равенство $x_1 = x_2$ не выполняется. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Тогда при $a > 1$ по теореме должно быть $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ по следствию 1 должно быть $a^{x_1} > a^{x_2}$, что противоречит условию $a^{x_1} = a^{x_2}$. ○

Задача 7 Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$.

▶ Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и $12 < 18$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$. ◁

Задача 8 Сравнить числа $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$.

▶ Так как $0 < \pi < 4$, то $0 < \frac{\pi}{4} < 1$. Сравним показатели: так как $8 < 9$, то $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, т. е. $\sqrt{8} < 3$. Применяя следствие 1, получаем $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $4^x = 2^{4\sqrt{3}}$.

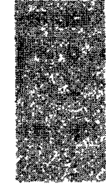
▶ По свойствам степени $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Поэтому уравнение можно записать так: $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$. Применяя следствие 2, получаем $2x = 4\sqrt{3}$, откуда $x = 2\sqrt{3}$. ◁

Следствие 3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда если $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$, а если $p < 0$, то $x_1^p > x_2^p$.

● По условию $\frac{x_2}{x_1} > 1$.

1) Если $p > 0$, то по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p > 1$. По свойству деления степеней $\frac{x_2^p}{x_1^p} > 1$, откуда $x_2^p > x_1^p$, т. е. $x_1^p < x_2^p$.

2) Если $p < 0$, то $-p > 0$, и по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-p} > 1$, откуда $\frac{x_2^{-p}}{x_1^{-p}} > 1$, $\frac{x_1^p}{x_2^p} > 1$, $x_1^p > x_2^p$. ○



Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

Задача 10 Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

▶ По свойствам степени получаем

$$(\sqrt{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9.$$

Так как $0 < 8 < 9$ и $\frac{1}{6} > 0$, то $8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$, т. е. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. ◁

Упражнения

55 (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

56 (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (**57—60**).

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

61 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,09$; 2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b = 27$;

3) $\frac{\sqrt{b}\,\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b = 1,3$; 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a = 2,7$.

62 Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt[3]{y}$.

63 Вынести общий множитель за скобки:

1) $x^{\frac{1}{2}} + x$; 2) $(ab)^{\frac{1}{3}} + (ac)^{\frac{1}{3}}$; 3) $y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{3}}$; 4) $12xy^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}y$.

64 Пользуясь тождеством $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, разложить на множители:

1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{2}{3}} - 1$; 3) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$;

4) $x - y$; 5) $4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}01m^{\frac{1}{6}} - n^{\frac{1}{6}}$.

65 Разложить на множители, используя тождество $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ или $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

1) $a - x$; 2) $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 4) $27a + c^{\frac{1}{2}}$.

66 Сократить дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{m + 2\sqrt{mn} - n}$; 3) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{c} - 1}$.

67 Упростить выражение $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2c^2 - 4cb}{c - b}$.

68 Вычислить:

1) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; 2) $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; 3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 4) $((0{,}5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$.

Вычислить **(69—71)**.

69 1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 4) $(5^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0$.

70 1) $2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{2-3\sqrt{3}} \cdot 27^{\sqrt{3}}$;

3) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$; 4) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

71 1) $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$; 2) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$;

3) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$; 4) $(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

72 Выяснить, какое из чисел больше:

1) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$;

5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1,4}$ или $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\pi}$ или $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3,14}$.

73 Сравнить число с единицей:

1) 2^{-2}; 2) $(0{,}013)^{-1}$; 3) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^5$; 4) $27^{1,5}$;

5) $2^{-\sqrt{5}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 7) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 8) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

74 Упростить выражение:

1) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1}$; 3) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : b^2$.

75 Сравнить числа: 1) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$.

76 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$; 2) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

3) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$; 4) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

Упростить выражение (77—78).

77 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$.

78 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

79 Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$.

Упростить выражение (80—83).

80 1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$.

81 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

82 1) $\dfrac{m^{\sqrt{3}} \cdot n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{x^{\sqrt{7}} \cdot y^{\sqrt{7}+1}}{(xy)^{\sqrt{7}}}$; 3) $(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})$;

4) $\left(2a^{-0,5} - \frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}} + 2a^{-0,5}\right)$.

83 1) $(a^{1-\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 2) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} \cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$;

3) $(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 4) $(a^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1})^{1-\sqrt[3]{3}}$.

Решить уравнение (84—85).

84 1) $5^{2x} = 5^4$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; 3) $9^x = 3^{2\sqrt{2}}$; 4) $16^x = 2^{8\pi}$.

85 1) $7^{x\sqrt{3}} = \sqrt{7}$; 2) $25^{x\sqrt{2}} = 5\sqrt{5}$;

3) $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{3})^{3x} = 3\sqrt{3}$.

86 Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[5]{20}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{7}$; 3) $\sqrt{17}$ и $\sqrt[3]{28}$; 4) $\sqrt[4]{13}$ и $\sqrt[5]{23}$.

Упростить выражение (87—89).

87 1) $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} - \frac{2a^2}{a-b}$;

2) $\frac{3xy-y^2}{x-y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

88 1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b} - \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

89 1) $\frac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}} + \frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$;

3) $\left(\frac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right) : \left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

90 Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег получит вкладчик через 3 года?

91 Банк выплачивает ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько денег получит вкладчик через 2 года 7 месяцев, если первоначальная сумма вклада составляла 2000 р.?



Упражнения к главе I

92 Вычислить:

1) $\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)$.

93 Представить в виде обыкновенной дроби:

1) 1,3(1); 2) 2,3(2); 3) 0,(248); 4) 0,(34).

94 Вычислить:

1) 48^0, 10^{-2}, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $(0{,}3)^{-3}$, $(-1{,}2)^{-2}$, $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

2) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{8^2}$, $\sqrt[8]{16^2}$, $\sqrt[3]{27^2}$;

3) $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $10000^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{2}{5}}$, $32^{-\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

95 Вычислить:

1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}$, $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $56^0:8^{-2}$, $16^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}:9^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^4:16^{-1}$;

3) $\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}$, $\frac{7^{\frac{7}{3}}\cdot 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}$, $\frac{(0{,}3)^{0{,}3}\cdot(0{,}3)^{-1}}{0{,}3^{1{,}3}}$.

Вычислить **(96—97)**.

96 1) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}}+9^{-1}$;

4) $(0{,}01)^{-2}:100^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$; 6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

97 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

98 Расположить числа в порядке возрастания:

1) $1^{3,75}$, 2^{-1}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 2) 98^0, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $32^{\frac{1}{5}}$.

99 Сравнить числа:

1) $(0,88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4,09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

100 Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием a:

1) $\dfrac{a^{1\frac{1}{2}}\,a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}\,a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(a^{2,5})^2\sqrt[5]{a}$; 4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^2$.

101 Упростить выражение:

1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

102 Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

103 Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$.

104 Сократить дробь:

1) $\dfrac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$.

105 Упростить:

1) $\dfrac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}$; 2) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

Проверь себя!

1 **Вычислить:**

1) $\frac{15^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0$; 3) $\left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$.

2 **Упростить выражение:** 1) $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^5 b}{c^2}}$; 2) $\frac{a^{-3} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

3 **Сократить дробь** $\frac{a - 9a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{1}{4}} + 21}$.

4 **Сравнить числа** $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{9}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$.

5 **Упростить выражение** $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^2$.

106 Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2 = -81,\ S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33,\ S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_2 = 130,\ b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68,\ b_2 - b_4 = 60$.

107 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: 1) 1,10(209); 2) 0,108(32).

108 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трех ее членов равна 39, а сумма их обратных величин равна $\frac{13}{27}$.

109 Упростить выражение $\sqrt{43 + 30\sqrt{2}} + \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$.

110 Упростить выражение $a = (4 - 3\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{5}$.

Сравнить полученное число с нулем.

111 Сравнить числа a и b, если:

1) $a = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{5}{3 + 2\sqrt{2}},\quad b = \frac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$;

2) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3},\quad b = \sqrt{10}$;

3) $a = 5 - \sqrt{15},\quad b = \sqrt{17} - 3$;

4) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12},\quad b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

112 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

6) $\frac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

113 Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$;

2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$.

Упростить выражение **(114—117)**.

114 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;

3) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$; 4) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1$.

115 1) $\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\frac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}$; 4) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

116 1) $\left(\frac{4a^2-9a^{-2}}{2a-3a^{-1}}+\frac{a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2$;

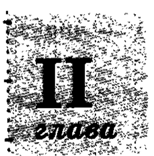
2) $\left(\frac{1}{(a+b)^{-2}}-\left(\frac{a-b}{a^3+b^3}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-1}$.

117 1) $\left(\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2+(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}{a+\sqrt{ab}}\right)^5\cdot\sqrt[3]{a^{10}\cdot\sqrt{a}}$;

2) $\left(\frac{a-a^{-1}}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}+1)}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\frac{ab\sqrt[3]{a}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}}\right)\cdot\frac{1}{a+b}$.

118 Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.



Степенная функция

Как алгебраисты вместо АА, ААА, ... пишут A^2, A^3, ..., так я... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...

И. Ньютон

Степенная функция, ее свойства и график



§ 6

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д. Все эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции $y = x^p$, где p — заданное действительное число. Свойства и график степенной функции существенно зависят от свойств степени с действительным показателем, и в частности от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p. Перейдем к подробному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

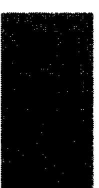
1. Показатель $p = 2n$ — четное натуральное число. В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ четная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 7).

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

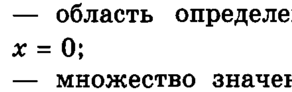


— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$ (рис. 8).

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ обладает следующими свойствами:



— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция $\dfrac{1}{x^{2n}}$ четная, так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$;
— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$.

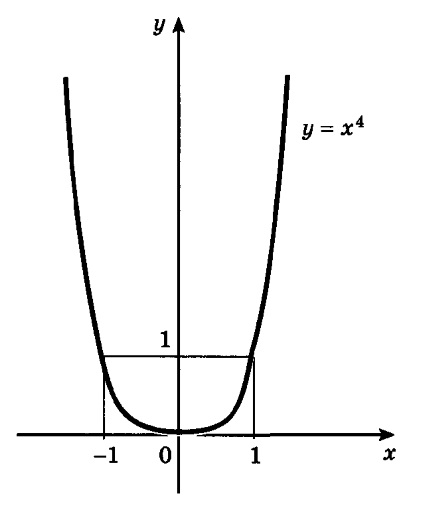


Рис. 7

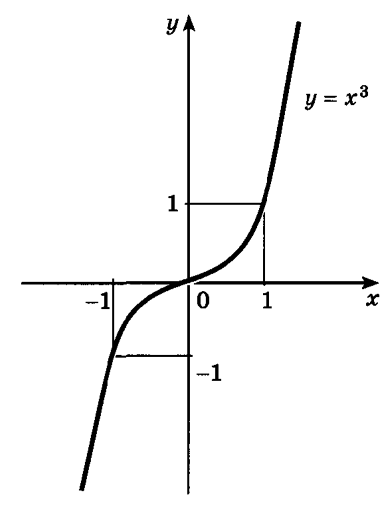


Рис. 8

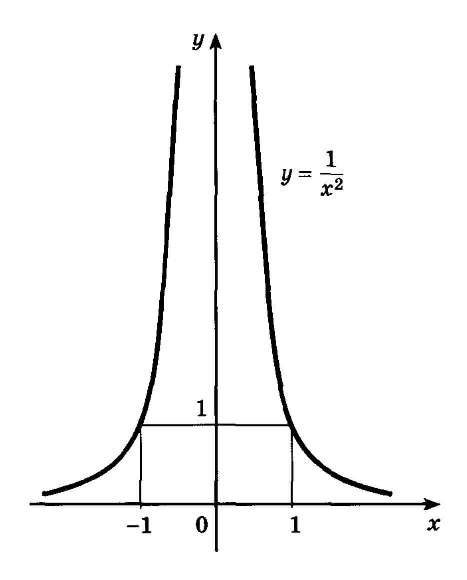


Рис. 9

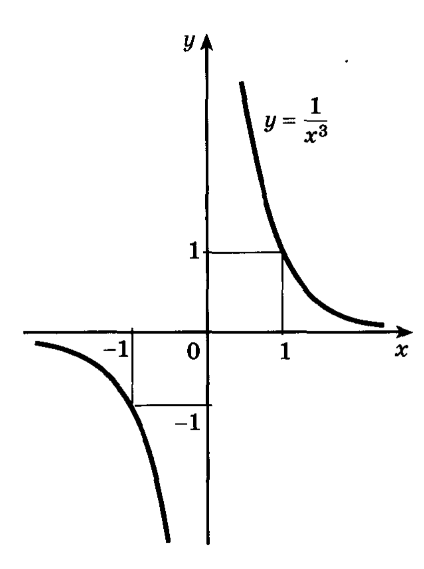


Рис. 10

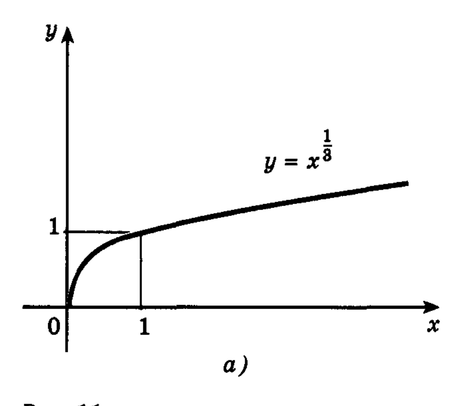
График функции имеет такой же вид, как, например, график функции $\frac{1}{x^2}$ (рис. 9).

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $y = 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;
— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

График функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ (рис. 10).



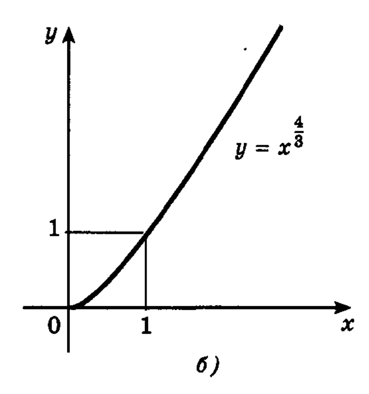


Рис. 11

5. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:



— область определения — неотрицательные числа $x \geqslant 0$;
— множество значений — неотрицательные числа $y \geqslant 0$;
— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$.

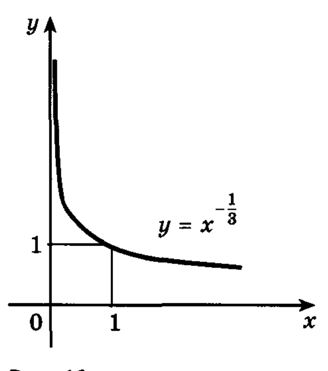


Рис. 12

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ (при $p > 1$) (рис. 11, *а*, *б*).

6. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:



— область определения — положительные числа $x > 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция является убывающей на промежутке $x > 0$.

График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (рис. 12).

Задача 1 Решить неравенство: 1) $x^{\frac{1}{3}} > x$; 2) $x^{\frac{4}{3}} > x$.

▶ 1) Неравенство $x^{\frac{1}{3}} > x$ имеет смысл при $x \geqslant 0$. При $x = 0$ неравенство не выполняется. При $x > 0$, возводя неравенство в куб, получаем $x > x^3$, т. е. $x(1 - x^2) > 0$. Так как $x > 0$, то $1 - x^2 > 0$, откуда $x^2 < 1$; $|x| < 1$. Следовательно, $0 < x < 1$.

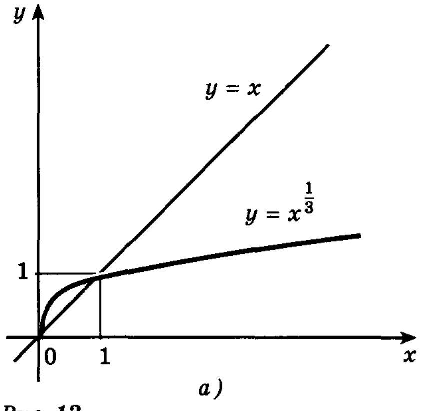
2) Аналогично, возводя неравенство $x^{\frac{4}{3}} > x$ при $x > 0$ в куб, получаем $x^4 > x^3$, т. е. $x^3(x - 1) > 0$. Так как $x > 0$, то $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$.

Ответ 1) $0 < x < 1$; 2) $x > 1$. ◁

Решение этой задачи показывает, что график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ лежит выше графика функции $y = x$ при $0 < x < 1$ и ниже при $x > 1$ (рис. 13, *а*); график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ лежит выше графика функции $y = x$ при $x > 1$ и ниже при $0 < x < 1$ (рис. 13, *б*).

Задача 2 Сравнить числа $(3{,}2)^{3-\pi}$ и $(3{,}5)^{3-\pi}$.

▶ Так как $3 < \pi < 4$, то $3 - \pi < 0$.
Функция $y = x^{3-\pi}$ убывает на промежутке $x > 0$. Поэтому $(3{,}2)^{3-\pi} > (3{,}5)^{3-\pi}$. ◁



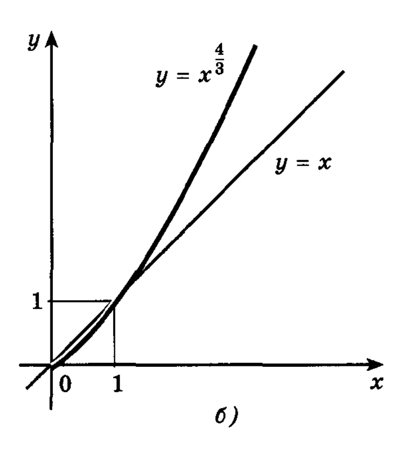


Рис. 13

Задача 3* Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\sqrt[3]{x} \quad \text{и} \quad y=x^{\frac{4}{3}}.$$

▶ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}$. Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x \geqslant 0$.

При $x \geqslant 0$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y=x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно записать так: $x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$. Возводя это уравнение (при $x \geqslant 0$) в куб, получаем $x=x^4$, откуда $x(x^3-1)=0$, $x_1=0$, $x_2=1$.

Ответ (0; 0), (1; 1). ◁

Упражнения

119 Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений:

1) $y=x^6$; 2) $y=x^5$; 3) $y=x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y=x^{-2}$; 5) $y=x^{-3}$; 6) $y=x^{\frac{1}{3}}$.

120 (Устно.) Является ли функция $y=x^p$ возрастающей (убывающей) при $x>0$, если:

1) $p=\sqrt{7}$; 2) $p=\frac{3}{\pi}$; 3) $p=1-\sqrt{3}$;

4) $p=\frac{1}{\pi}$; 5) $p=3-\pi$; 6) $p=0,(3)$?

121 Изобразить схематически график функции:

1) $y=x^{\frac{2}{5}}$; 2) $y=x^{\frac{5}{2}}$; 3) $y=x^{-5}$; 4) $y=x^{\sqrt{3}}$.

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{2,7}$; 2) $0{,}2^{0,3}$; 3) $0{,}7^{9,1}$; 4) $\sqrt{3}^{\,0,2}$.

123 Пользуясь рисунком 13, найти промежутки, на которых график функции:

1) $y=x^{\sqrt{2}}$; 2) $y=x^{\pi}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y=x$.

124 Пользуясь рисунком 13, найти промежутки, на которых график функции:

1) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $y = x^{\sin 45^\circ}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

125 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^{7,2}$ и $4{,}3^{7,2}$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$;

3) $0{,}3^{0,3}$ и $0{,}2^{0,3}$; 4) $2{,}5^{-3,1}$ и $2{,}6^{-3,1}$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$;

7) $(4\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}$ и $(3\sqrt{4})^{\frac{2}{5}}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-0,2}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-0,2}$.

126 В одной системе координат построить графики функций, находя сначала их области определения и множества значений:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;

3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$; 4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

127 Пользуясь рисунком 13, найти промежутки, на которых график функции: 1) $y = x^{1-\pi}$; 2) $y = x^{1-\sqrt{2}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

128 Изобразить схематически график функции и найти ее область определения и множество значений:

1) $y = x^{\pi} + 1$; 2) $y = x^{\frac{1}{\pi}} - 1$; 3) $y = (x-2)^{\pi}$;

4) $y = (x+1)^{-\sqrt{2}}$; 5) $y = (x-2)^{-2}$; 6) $y = \frac{2}{x^{\sqrt{2}}}$.

129 Построить график функции и указать ее область определения, множество значений и промежутки возрастания и убывания:

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;

4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$; 5) $y = |x+2|^{\frac{1}{3}}$; 6) $y = |2x|^{-3}$.

130 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{\frac{5}{7}}$.

§ 7 Взаимно обратные функции

Для обозначения функции, кроме известного вам $y = y(x)$, часто используют буквы f, g, F и т. д. Например, пишут: дана функция $y = f(x)$ (читается: «Игрек равен эф от икс») или пишут: $g(x) = 2x - 1$, $F(x) = x^2$ и т. п. При этом независимую переменную x обычно называют *аргументом* функции. Возрастающие и убывающие функции иногда называют одним словом — *монотонные*.

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко приходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Примером может служить формула $v = v_0 - gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Из этой формулы можно найти обратную зависимость — времени t от скорости v:

$$t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

В рассмотренном примере каждому значению функции соответствует одно значение аргумента. Для таких функций можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции. Такие функции называют *обратимыми*.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

Например, функция $y = 2x - 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y = 2x - 2$ относительно x.

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как,

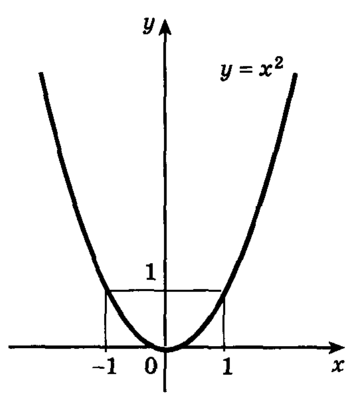


Рис. 14

например, значение $y = 1$ она принимает при $x = 1$ и при $x = -1$ (рис. 14). Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области ее определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями поменяем местами x и y. Получим $y = g(x)$. Функцию $y = g(x)$ называют *обратной* к функции $y = f(x)$.

Задача 1 Найти функцию, обратную к функции

$$y = 3x + 5. \qquad (1)$$

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = \frac{1}{3}(y - 5)$. В этой формуле поменяем местами x и y:

$$y = \frac{1}{3}(x - 5). \qquad (2)$$

Функция (2) обратна к функции (1). ◁

Вообще, если обратимая функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для нее обратной $y = \frac{1}{3}(x - 5)$ функции. Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Из определения обратной функции следует, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Задача 2 Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x - 2}$.

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = 2 + \frac{1}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y = 2 + \frac{1}{x}$. ◁

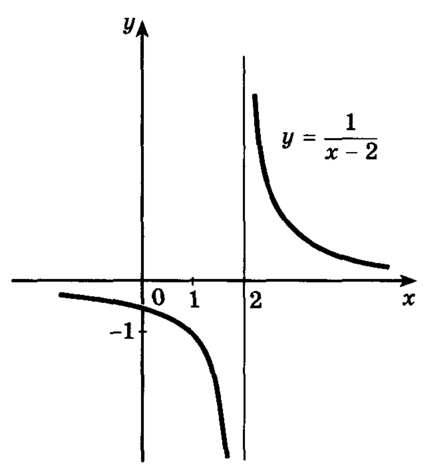


Рис. 15

Рис. 16

В этой задаче область определения функции $y = \frac{1}{x-2}$ есть множество действительных чисел, не равных 2, а множество ее значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции изображен на рисунке 15.

Для обратной функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 2. График этой функции изображен на рисунке 16.

Теорема 1. Монотонная функция является обратимой.

● Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и пусть y_0 — ее значение в некоторой точке x_0, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда если x принадлежит области определения функции, то при $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$.

Следовательно, значение y_0 функция $f(x)$ принимает только в одной точке x_0 и поэтому является обратимой. Для убывающей функции доказательство проводится аналогично. ○

Например, функция $y = x^3$ возрастает и поэтому является обратимой; обратной к ней является функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 17).

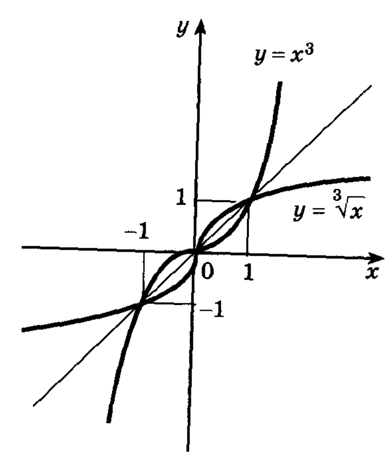


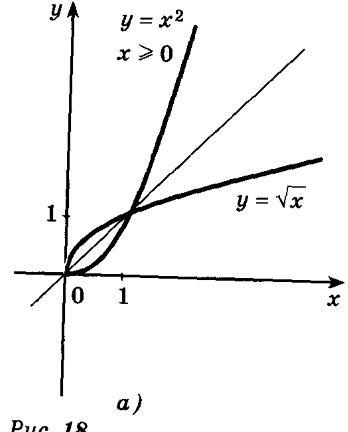
Рис. 17

Если функция $y = f(x)$ возрастает, то с увеличением x значения y увеличиваются и, наоборот, с увеличением y увеличиваются x. Это означает, что обратная функция также возрастает. Аналогично если функция $y = f(x)$ убывает, то обратная к ней функция также убывает. Например, функция $f(x) = 1 - 2x$ убывает и обратная к ней функция $g(x) = \frac{1-x}{2}$ также убывает.

Функция, не являющаяся монотонной, обратной может не иметь. Например, функция $y = x^2$, рассматриваемая на всей числовой оси, не имеет обратной. Однако если функцию $y = x^2$ рассматривать только при $x \geqslant 0$, то на этом промежутке она возрастает и, следовательно, имеет обратную $y = \sqrt{x}$ (рис. 18, *а*). Функция $y = x^2$, рассматриваемая при $x \leqslant 0$, убывает и также имеет обратную $y = -\sqrt{x}$ (рис. 18, *б*).

Теорема 2. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

● Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y_0; x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$ (рис. 19), а точки $(x_0; y_0)$



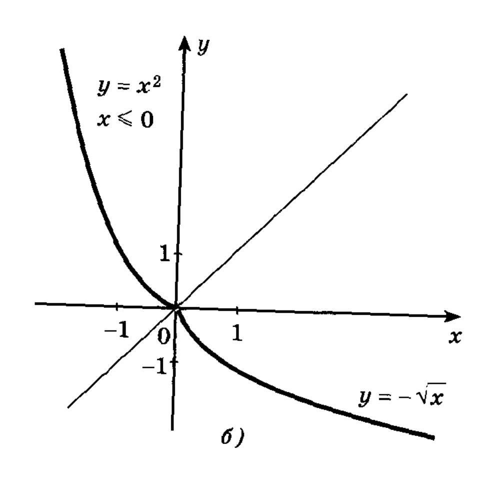


Рис. 18

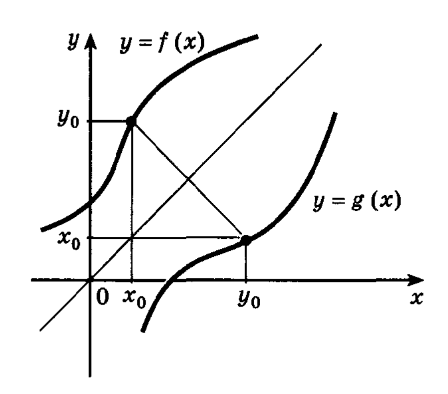


Рис. 19

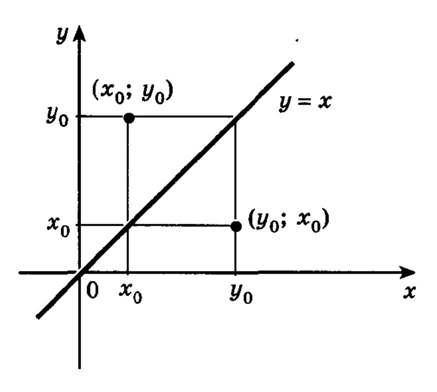


Рис. 20

и $(y_0;\ x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 20). ○

Рисунок 18 иллюстрирует эту теорему.

Отметим, что степенная функция $y = x^p$ с областью определения $x > 0$ и $p \neq 0$ обратима, так как она монотонна. Обратной к ней является функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

Упражнения

131 (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 + 7$; 3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = x^4$; 6) $y = x^4,\ x < 0$.

132 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x + 4$;

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; 4) $y = \frac{3x-1}{2}$;

5) $y = x^3 + 1$; 6) $y = x^3 - 3$.

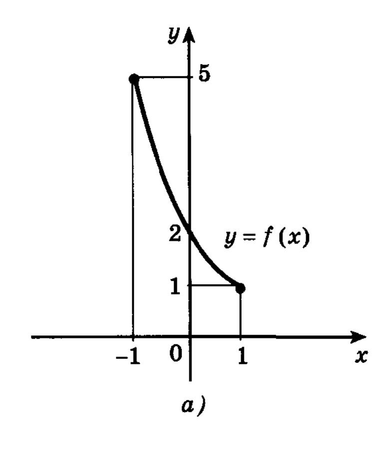
133 Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной:

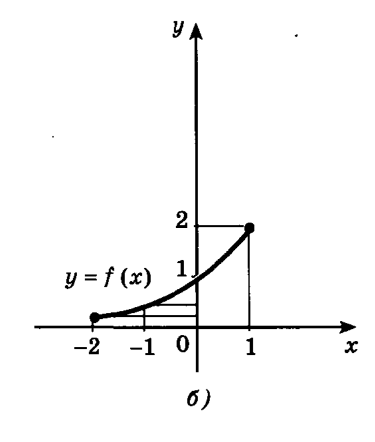
1) $y = -2x + 1$; 2) $y = \frac{1}{4}x - 7$;

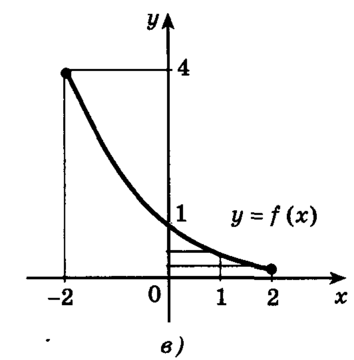
3) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x-1)^3$;

5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{3}{x-4}$.

134 Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 21). Построить график функции, обратной к данной.







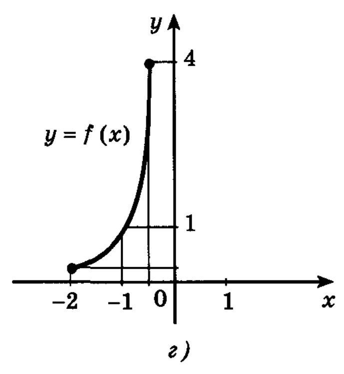


Рис. 21

135 Являются ли взаимно обратными функции:

1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$; 2) $y = -x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$;

3) $y = x^{-3}$ и $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y = \sqrt[5]{x^3}$ и $y = x\sqrt[3]{x^2}$?

136 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = -x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = -x^{\frac{3}{5}}$; 3) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$.

137 На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной; найти область определения и множество значений каждой из них:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{2x - 1}{3}$; 3) $y = x^2 - 1$ при $x \geqslant 0$;

4) $y = (x - 1)^2$ при $x \geqslant 1$; 5) $y = x^3 - 2$;

6) $y = (x - 1)^3$; 7) $y = \sqrt{x - 1}$; 8) $y = \sqrt{x} + 1$.

§ 8 Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильные уравнения.

Задача 1 Найти точки пересечения графиков функций $y = 3\sqrt{x}$ и $y = x + 2$.

▶ Если $(x;\ y)$ — точка пересечения данных графиков, то $y = 3\sqrt{x} = x + 2$. Следовательно, для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить уравнение

$$3\sqrt{x} = x + 2. \qquad (1)$$

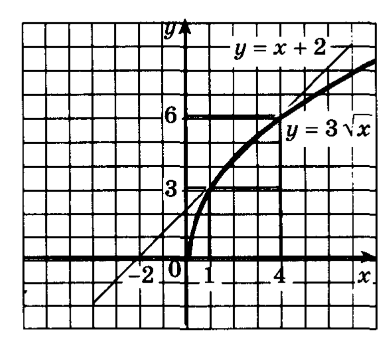


Рис. 22

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получаем $9x = x^2 + 4x + 4$, откуда $x^2 - 5x + 4 = 0$. Корни полученного квадратного уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба корня являются также и корнями уравнения (1).

Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков $y_1 = 3\sqrt{x_1} = 3$, $y_2 = 3\sqrt{x_2} = 6$. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6) (рис. 22).

Ответ (1; 3), (4; 6). ◁

При решении задачи 1 исходное уравнение $3\sqrt{x} = x + 2$ заменялось уравнениями

$$9x = x^2 + 4x + 4,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Все эти три уравнения имеют одни и те же корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Такие уравнения называют *равносильными*.



Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются равносильными.

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x = 3$. Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

Уравнения $2x = 4$ и $3x^2 = 12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x = 2$, а второе — корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения. *Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.*

Из курса 7 класса вы знаете, что можно сделать следующие преобразования уравнений:

Любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Заметим, что если некоторое выражение в левой или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x} = x - 2$ получается уравнение $x = (x - 2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x = 4$, а второе — два корня $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$. В этом случае второе уравнение называют *следствием* первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Задача 2 Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2)$$

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трех дробей, т. е. на $(x-1)(x-2)$, получаем

$$2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4, \qquad (3)$$

откуда $x^2-x-2=0$, $x_1=2$, $x_2=-1$.

Проверка. 1) При $x=2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=2$ не является корнем данного уравнения.

2) При $x=-1$ левая часть уравнения равна

$$\frac{2\cdot(-1)}{-1-2}-\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{2}{3},$$

правая часть равна

$$\frac{4}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{2}{3}.$$


Ответ $x=-1$. ◁

Заметим, что для проверки корня $x=-1$ достаточно увидеть, что знаменатели дробей уравнения при $x=-1$ не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

При решении задачи 2 из уравнения (2) получено уравнение (3), которое является следствием уравнения (2). Корень $x_1=2$ уравнения (3) не является корнем уравнения (2). Его называют *посторонним корнем*.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Задача 3 Решить уравнение $x^2-4=7x-14$.

▶ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x+2)(x-2)=7(x-2), \qquad (4)$$

откуда $(x + 2 - 7)(x - 2) = 0$, т. е. $(x - 5)(x - 2) = 0$, следовательно, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

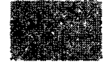
Если обе части уравнения (4) разделить на $x - 2$, то получится уравнение $x + 2 = 7$, которое имеет только один корень $x = 5$, т. е. произойдет потеря корня $x = 2$, и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие его преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения — следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

2. Равносильные неравенства.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.



Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*.

Например, неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x < 3$. Неравенства $x^2 - 4x < x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $2 < x < 3$. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и $2x > x - 1$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x < -1$ и $x > 1$, а решениями второго — числа $x > -1$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

Задача 4 Решить неравенство $\frac{5x-3}{x^2+1} > 1$.

▶ Так как $x^2 + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, то, умножая неравенство на $x^2 + 1$, получаем неравенство $5x - 3 > x^2 + 1$, равносильное данному. Решая это неравенство, получаем

$$x^2 - 5x + 4 < 0, \ (x - 1)(x - 4) < 0,$$

откуда $1 < x < 4$. ◁

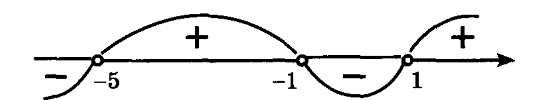


Рис. 23

Рис. 24

Задача 5 Решить неравенство $\dfrac{3}{x-1} > \dfrac{2}{x+1}$.

▶ $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} > 0$, $\dfrac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$, $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 23), получаем $-5 < x < -1$, $x > 1$.

Ответ $-5 < x < -1$, $x > 1$. ◁

Задача 6 Решить неравенство $x^6 < x^2$.

▶ $x^6 - x^2 < 0$, $x^2(x^4 - 1) < 0$,

$x^2(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 24), получаем $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Ответ $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. ◁

Упражнения

.138 Решить уравнение:

1) $(x+7)\cdot 3 = 2x + 14$;
2) $x^2 + \dfrac{1}{x^2-4} = 4 + \dfrac{1}{x^2-4}$;
3) $\dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{1-2x}{x^2-1}$;
4) $\dfrac{5x-15}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{2}{x+2}$.

139 Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$;
2) $\dfrac{1}{5}(2x-1) = 1$ и $\dfrac{3x-1}{8} = 1$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$;
4) $(x-5)^2 = 3(x-5)$ и $x - 5 = 3$;
5) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x-1} = 0$;
6) $|x-2| = -3$ и $3^x = (-1)^3$?

140 Равносильны ли следующие неравенства:

1) $2x - 1 \geqslant 2$ и $2(x-1) \geqslant 1$;
2) $(x-1)(x+2) < 0$ и $x^2 + x < 2$;
3) $(x-2)(x+1) < 3x + 3$ и $x - 2 < 3$;
4) $x(x+3) \geqslant 2x$ и $x^2(x+3) \geqslant 2x^2$?

141 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x - 3 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$;

2) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$.

142 Решить уравнение:

1) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1}$; 2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$;

3) $(x - 3)(x - 5) = 3(x - 5)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$.

143 Решить неравенство:

1) $\frac{x+3}{2+x^2} < 3$; 2) $\frac{x-2}{5-x} > 1$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (**144—145**).

144 1) $|2x - 1| = 3$ и $2x - 1 = 3$;

2) $\frac{3x-2}{3} - \frac{4-x}{2} - \frac{3x-5}{6} = 2x - 2$ и $2x + 3 = \frac{10}{3}$.

145 1) $2x - 1 = 4 - 1{,}5x$ и $3{,}5x - 5 = 0$;

2) $x(x - 1) = 2x + 5$ и $x^2 - 3x - 5 = 0$;

3) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x + 1 = -3$; 4) $\sqrt{x+2} = 3$ и $x + 2 = 9$.

146 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $|x| = \sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2} = 5$;

2) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x-3}{x+2}$ и $(x - 2)(x + 2) = (x - 3)(x + 3)$.

147 Решить уравнение $\frac{1}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} - \frac{5x}{9x^2-1} = \frac{3x^2}{1-9x^2}$.

148 Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$;

2) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x(x-4)}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

149 Решить неравенство:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 2x^3 - x^2 + 4x - 2$;

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > -3x^3 + x^2 + 12x - 2$.

150 Решить уравнение:

1) $(x-3)^{x^2-x-2} = 1$; 2) $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$;

3) $(x+3)^{x^2-4} = (x+3)^{-3x}$; 4) $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{2x}$.

§ 9 Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1} = x - 1$, $\sqrt{5x-4} = 2 + \sqrt{x}$ неизвестное x находится под знаком корня. Такие уравнения называют *иррациональными*. Приведем еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt[4]{x+15} = x + 1, \quad \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}.$$

Иррациональные уравнения часто получаются при решении различных задач. Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве:

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение-следствие данного.

● Пусть x — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. $f(x) = g(x)$ — верное числовое равенство. Тогда по свойствам верных числовых равенств $f^n(x) = g^n(x)$, где n — натуральное число, также верное числовое равенство, т. е. x — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$. ○

Отметим, что при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень (т. е. при возведении уравнения в натуральную степень) может получиться уравнение, не равносильное данному. Например, уравнение $\sqrt{6-x} = x$ имеет один корень $x = 2$, а уравнение $6 - x = x^2$ имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

При возведении уравнения в натуральную степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка необходима.

Например, при возведении обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{x}$ в квадрат получается уравнение $x^2 + x - 1 = x$, т. е. $x^2 = 1$.

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Второй корень является посторонним для исходного уравнения, так как подкоренные выражения при $x = -1$ отрицательны.

Задача 1 Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

▶ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$x^2+7x+6=36, \text{ или } x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-10$.

Проверка показывает, что $x_2=-10$ — посторонний корень.

Ответ $x=3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+12}=x. \qquad (1)$$

▶ Возведем уравнение в четвертую степень:

$$x^2+12=x^4,$$

откуда $x^4-x^2-12=0$. Решим это биквадратное уравнение

$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$, т. е. $x^2=4$ или $x^2=-3$.

Уравнение $x^2=4$ имеет два корня $x=\pm2$. Уравнение $x^2=-3$ не имеет действительных корней. Так как при возведении обеих частей уравнения (1) в четвертую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x=2$ обе части уравнения (1) равны 2, т. е. $x=2$ — корень уравнения (1). При $x=-2$ левая часть уравнения (1) равна 2, а правая равна -2, т. е. -2 не является корнем уравнения.

Ответ $x=2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-19}=x-1. \qquad (2)$$

▶ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда

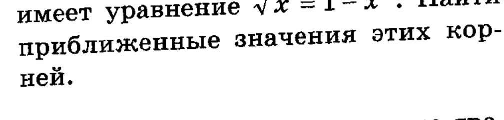
$$x^3-19=x^3-3x^2+3x-1,$$
$$3x^2-3x-18=0,\ x^2-x-6=0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями уравнения (2).

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. ◁

Иногда при решении иррационального уравнения полезно использовать графики функций.

Задача 4 Выяснить с помощью графиков, сколько корней



имеет уравнение $\sqrt{x} = 1 - x^2$. Найти приближенные значения этих корней.

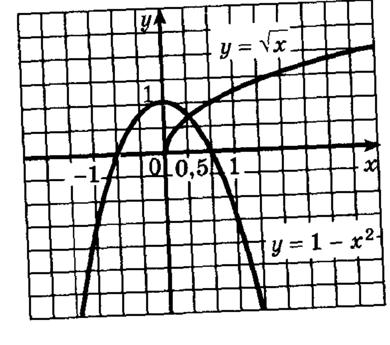




Рис. 25

▶ Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 1 - x^2$ (рис. 25). Графики пересекаются в одной точке при $x \approx 0{,}5$.

Ответ $x \approx 0{,}5$. ◁

Упражнения

151 (Устно.) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt[3]{x} = 2$; 4) $\sqrt[3]{x} = -3$;
5) $\sqrt[3]{1 - 3x} = 0$; 6) $\sqrt[4]{x} = 1$; 7) $\sqrt[4]{2 - x} = 0$.

Решить уравнение (152—161).

152 1) $\sqrt{x + 1} = 3$; 2) $\sqrt{x - 2} = 5$; 3) $\sqrt{4 + x} = \sqrt{2x - 1}$;

153 1) $\sqrt[3]{2x + 3} = 1$; 2) $\sqrt[3]{1 - x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{3x^2 - 3} = \sqrt[3]{8x}$.

154 1) $x + 1 = \sqrt{1 - x}$; 2) $x = 1 + \sqrt{x + 11}$;
3) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5 - x}$; 4) $\sqrt{x^2 - x - 3} = 3$.

155 1) $\sqrt{x} - x = -12$; 2) $x + \sqrt{x} = 2(x - 1)$;
3) $\sqrt{x - 1} = x - 3$; 4) $\sqrt{6 + x - x^2} = 1 - x$.

156 1) $\sqrt{2x - 34} = 1 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{5x} + \sqrt{14 - x} = 8$;
3) $\sqrt{15 + x} + \sqrt{3 + x} = 6$; 4) $\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{1 - x} = 1$.

157 1) $\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^3 + x^2} = 0$; 2) $\sqrt[3]{1 + x^4} = \sqrt[3]{1 + x^2}$.

158 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; 2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$; 4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

159 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$.

160 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; 2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x-1)}$;

3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$; 4) $x^2=\sqrt{19x^2-34}$.

161 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

162 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение, и найти приближенные значения этих корней:

1) $\sqrt{x-6}=-x^2$; 2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$;

3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$; 4) $x^3-1=\sqrt{x-1}$.

163 Решить уравнение:

1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$;

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$;

3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$;

4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$.

164 Решить относительно x уравнение:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a$; 2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}=a-1$.



§ 10* Иррациональные неравенства

Задача 1 Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведется из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через ее центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от нее до края мишени и до центра была не больше 2 см?

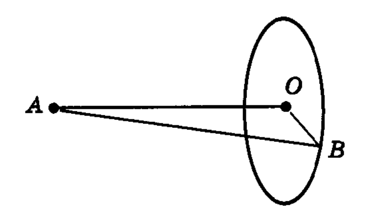


Рис. 26

▶ Пусть A — точка выстрела, O — центр мишени, B — точка на окружности мишени (рис. 26). По условию $BO = 50$ см. Обозначим $AO = x$, тогда $AB = \sqrt{x^2 + 2500}$. По условию задачи $AB - AO \leqslant 2$, т. е. $\sqrt{x^2 + 2500} - x \leqslant 2$, или

$$\sqrt{x^2 + 2500} \leqslant x + 2. \qquad (1)$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то левая и правая части неравенства (1) положительны. Следовательно, обе части неравенства (1) можно возвести в квадрат; при этом знак неравенства не изменится (см. § 5) и получится неравенство, равносильное неравенству (1), т. е. $x^2 + 2500 \leqslant x^2 + 4x + 4$, откуда $4x \geqslant 2496$, $x \geqslant 624$ (см).

Ответ Не меньше 6,24 м. ◁

В этой задаче пришлось решать неравенство (1), содержащее неизвестное под знаком корня. Такие неравенства называют иррациональными.

Задача 2 Решить неравенство $\sqrt{5 - x} < 4$. (2)

▶ Найдем область определения неравенства (2), т. е. множество таких значений x, при которых имеют смысл обе части неравенства. Правая часть неравенства определена при всех значениях x, а левая — при $5 - x \geqslant 0$, т. е. при $x \leqslant 5$. Следовательно, область определения неравенства (2) — луч $x \leqslant 5$.

При $x \leqslant 5$ обе части неравенства (2) неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат обеих частей получается равносильное (на множестве $x \leqslant 5$) неравенство $5 - x < 16$.

Таким образом, неравенство (2) равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$

Решая эту систему, получаем $-11 < x \leqslant 5$.

Ответ $-11 < x \leqslant 5$. ◁

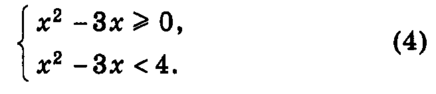
Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно провести устно и сразу записать, что неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5 - x \geqslant 0, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$$

Задача 3 Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x}<2. \qquad (3)$$

► Неравенство (3) равносильно системе



$$\begin{cases} x^2-3x \geqslant 0, \\ x^2-3x<4. \end{cases} \qquad (4)$$

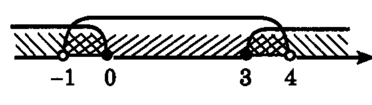


Рис. 27

Решая первое неравенство системы (4), получаем $x \leqslant 0$, $x \geqslant 3$. Решая второе неравенство системы (4), получаем $-1 < x < 4$. Оба неравенства системы (4) выполняются при $-1 < x \leqslant 0$, а также при $3 \leqslant x < 4$ (рис. 27).


Ответ $-1 < x \leqslant 0$, $3 \leqslant x < 4$. ◁

Задача 4 Решить неравенство

$$\sqrt{10+x-x^2} \geqslant 2. \qquad (5)$$

► Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 10+x-x^2 \geqslant 0, \\ 10+x-x^2 \geqslant 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как каждое решение второго неравенства системы (6) является решением первого неравенства системы (6), то эта система равносильна одному второму неравенству

$$10+x-x^2 \geqslant 4. \qquad (7)$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно неравенству (7). Решая неравенство (7), получаем $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ $-2 \leqslant x \leqslant 3$. ◁

Задача 5 Решить неравенство

1) $\sqrt{3x-4} < -5$; 2) $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$.

► 1) При всех допустимых значениях x, т. е. при $x \geqslant \frac{4}{3}$, значения $\sqrt{3x-4}$ неотрицательны. Поэтому неравенство $\sqrt{3x-4} < -5$ решений не имеет.

2) Неравенство $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$ выполняется только тогда, когда $\sqrt{2x^2+5x-3} = 0$, т. е. когда $2x^2+5x-3=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$. ◁

Задача 6 Решить неравенство

$$\sqrt{3x+1} \leqslant x+1. \qquad (8)$$

▶ Область определения этого неравенства — луч $x \geqslant -\frac{1}{3}$. При этих значениях x обе части неравенства (8) неотрицательны. Следовательно, неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 \geqslant (x+1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$.

Ответ $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$. ◁

Задача 7 Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1. \qquad (9)$$

▶ Область определения этого неравенства — луч $x \geqslant -3$. При всех $x \geqslant -3$ левая часть этого неравенства неотрицательна. Правая часть этого неравенства отрицательна при $x < -1$. Поэтому все значения x из промежутка $-3 \leqslant x < -1$ являются решениями неравенства (9).

Рассмотрим случай, когда $x \geqslant -1$. Тогда обе части неравенства (9) неотрицательны, и поэтому обе части этого неравенства можно возводить в квадрат: $x + 3 > (x + 1)^2$. Решением этого неравенства являются значения x из промежутка $-2 < x < 1$. Отсюда, учитывая, что $x \geqslant -1$, получаем $-1 \leqslant x < 1$.

Итак, решениями неравенства (9) являются все значения x из промежутка $-3 \leqslant x < -1$, а также из промежутка $-1 \leqslant x < 1$, т. е. из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Ответ $-3 \leqslant x < 1$. ◁

Неравенство (9) проще решать с помощью графиков. На рисунке 28 построены графики функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = x + 1$. Из этого рисунка видно, что решениями неравенства (9) являются значения x из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Задача 8 С помощью графиков решить неравенство $\sqrt{x} < 2 - x$.

▶ На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ (рис. 29) и выясним, при каких

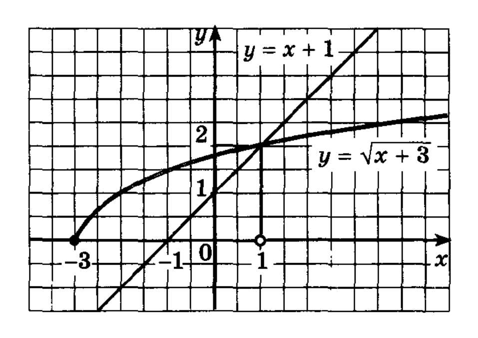


Рис. 28

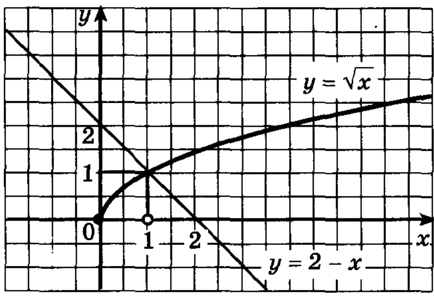


Рис. 29

значениях x точки графика функции $y = \sqrt{x}$ лежат ниже точек графика функции $y = 2 - x$.

Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $\sqrt{x} = 2 - x$. Этот корень $x = 1$. График функции $y = \sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = 2 - x$ при $0 \leqslant x < 1$.



$0 \leqslant x < 1$. ◁

Задача 9* Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 5x - 3} > x - 1. \qquad (10)$$

▶ Найдем область определения этого неравенства, т. е. решим неравенство $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$. Так как корнями уравнения являются числа $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, то неравенство выполняется при $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и при $x \geqslant 3$ (рис. 30).

Таким образом, для решения неравенства нужно выбирать только такие значения x, которые принадлежат его области определения.

1) Если $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$, то из этого промежутка области определения неравенства (10) удовлетворяют только числа $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (рис. 31).



Рис. 30

Рис. 31

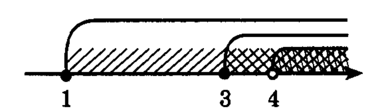


Рис. 32

2) Если $x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$, то, возводя обе части неравенства (10) в квадрат, получаем

$$2x^2 - 5x - 3 > x^2 - 2x + 1,$$

откуда $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Так как корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются числа $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, то неравенство $x^2 - 3x - 4 > 0$ выполняется при $x < -1$ и $x > 4$. Из этих двух промежутков области определения неравенства условию $x \geqslant 1$ удовлетворяют только числа $x > 4$ (рис. 32).

Ответ $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x > 4$. ◁

Упражнения

165 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3 - x \leqslant 2, \\ 2x + 1 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9 - x^2 \leqslant 0, \\ x + 5 < 0. \end{cases}$

Решить неравенство **(166—171)**.

166 1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt[3]{x} \geqslant 1$;

4) $\sqrt[3]{2x} < 3$; 5) $\sqrt{3x} > 1$; 6) $\sqrt{2x} \leqslant 2$.

167 1) $\sqrt{x-2} > 3$; 2) $\sqrt{x-2} < 1$;

3) $\sqrt{3-x} < 5$; 4) $\sqrt{4-x} > 3$;

5) $\sqrt{2x-3} > 4$; 6) $\sqrt{x+1} \geqslant \frac{2}{3}$;

7) $\sqrt{3x-5} < 5$; 8) $\sqrt{4x+5} \leqslant \frac{1}{2}$.

168 1) $\sqrt{x^2-1} > 1$; 2) $\sqrt{1-x^2} < 1$;

3) $\sqrt{25-x^2} > 4$; 4) $\sqrt{25-x^2} < 4$.

169 1) $\sqrt{2x^2+3x-2} > 0$; 2) $\sqrt{2+x-x^2} > -1$;

3) $\sqrt{6x-x^2} < \sqrt{5}$; 4) $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2}$;

5) $\sqrt{x^2+2x} > -3-x^2$; 6) $\sqrt{4x-x^2} > -2-3x^2$.

170 1) $\sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{3+2x} \geqslant \sqrt{x+1}$;

3) $\sqrt{2x-5} < \sqrt{5x+4}$; 4) $\sqrt{3x-2} > x-2$;

5) $\sqrt{5x+11} > x+3$; 6) $\sqrt{3-x} < \sqrt{3x-5}$.

171 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x+3} < \sqrt{7-x} + \sqrt{10-x}$.

Решить неравенство, используя графики функций **(172—173)**.

172 1) $\sqrt{x} \geqslant x$; 2) $\sqrt{x} < x$; 3) $\sqrt{x} > x-2$; 4) $\sqrt{x} \leqslant x-2$.

173 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$; 3) $\sqrt{x} \geqslant 2x-1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

174 Решить неравенство (относительно x):

1) $\sqrt{x-1} < a$; 2) $\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x$, если $a \leqslant 0$.

Упражнения к главе II

175 Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1) $y = x^9$; 2) $y = 7x^4$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = x^{-3}$.

176 На одном рисунке построить графики функций $y = x^2$ и $y = x^{\frac{1}{2}}$. Сравнить значения этих функций при $x = 0$; $0{,}5$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 5.

177 Расположить числа в порядке возрастания:

1) $0{,}3^{\pi}$, $0{,}3^{0{,}5}$, $0{,}3^{\frac{2}{3}}$, $0{,}3^{3{,}1415}$; 2) $\sqrt{2^{\pi}}$, $1{,}9^{\pi}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, π^{π};

3) 5^{-2}, $5^{-0{,}7}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2{,}1}$; 4) $0{,}5^{-\frac{2}{3}}$, $1{,}3^{-\frac{2}{3}}$, $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt{2}^{-\frac{2}{3}}$.

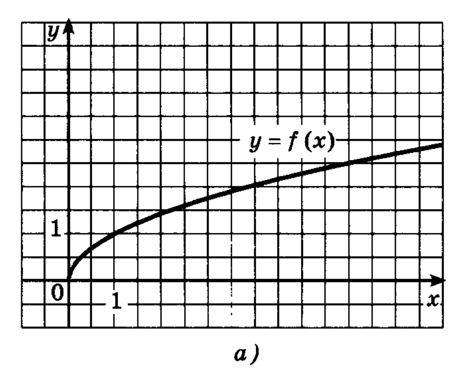
178 Решить уравнение с помощью графиков:

1) $\sqrt[3]{x} = x^2 + x - 1$; 2) $x^{-2} = 2 - x^2$.

179 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt[3]{1-x}$; 2) $y = (2-x^2)^{\frac{3}{5}}$;

3) $y = (3x^2+1)^{-2}$; 4) $y = \sqrt{x^2-x-2}$.



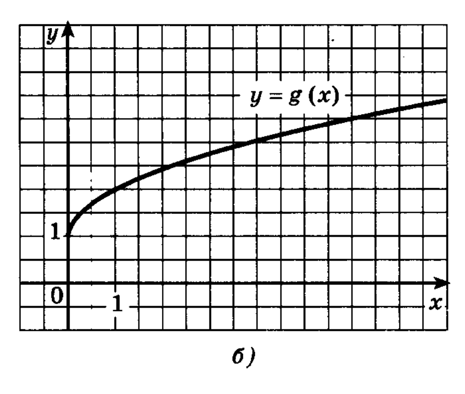


Рис. 33

180 Найти функцию, обратную данной, ее область определения и множество значений:

1) $y = 0{,}5x + 3$; 2) $y = \frac{2}{x-3}$;

3) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^3 - 1$.

181 Изобразить график функции, обратной к функции, график которой изображен на рисунке 33.

182 Являются ли равносильными уравнения:

1) $2^{x^2+3x} = 2^2$ и $x^2 + 3x = 2$;

2) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2}$ и $x^2 + 3x = 2$;

3) $\sqrt[3]{x+18} = \sqrt[3]{2-x}$ и $x + 18 = 2 - x$?

183 Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} = 8$; 3) $\sqrt{3-4x} = 2x$;

4) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$; 5) $\sqrt[3]{x^2-17} = 2$; 6) $\sqrt[4]{x^2+17} = 3$.

Проверь себя!

1 **Найти область определения функции:**

1) $y = 3(x-1)^{-3}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2-3x-4}$.

2 **Построить график функции:**

1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 2) $y = 2x^{-2}$; 3) $y = \frac{x^4}{2}$.

Для каждой функции указать область определения и значения x, при которых $y > 0$.

3 **Решить уравнение:**

1) $\sqrt[3]{x-3} = 5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$.

184 Изобразить схематически на одном рисунке графики функций:

1) $y=\sqrt{x^5}$, $y=x\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[5]{x}$, $y=x^{0,7}$;

3) $y=x^{-1,5}$, $y=x^{-2,1}$; 4) $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=x^{\pi}$.

185 Являются ли заданные функции взаимно обратными:

1) $y=\dfrac{10-3x}{x-4}$ и $y=\dfrac{4x+10}{x+3}$;

2) $y=\dfrac{3x-6}{3x-1}$ и $y=\dfrac{6-x}{3-3x}$;

3) $y=5\,(1-x)^{-1}$ и $y=(5-x)\cdot x^{-1}$;

4) $y=\dfrac{2-x}{2+x}$ и $y=\dfrac{2(x-1)}{1+x}$?

186 Найти функцию, обратную к данной, ее область определения и множество значений:

1) $y=2+\sqrt{x+2}$; 2) $y=2-\sqrt{x+4}$;

3) $y=\sqrt{3-x}-1$; 4) $y=\sqrt{1-x}+3$.

Решить уравнение (**187—188**).

187 1) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$;

2) $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$;

4) $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}$.

188 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$; 2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$;

3) $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$; 4) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$;

5) $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=2$;

6) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.

Решить неравенство (**189—190**).

189 1) $\sqrt{x+1}<x-1$; 2) $\sqrt{1-x}>x+1$;

3) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 4) $\sqrt{2x+1}\leqslant x+1$.

190 1) $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{2x^2-7x-4}}{x+4}<\dfrac{1}{2}$;

3) $\sqrt{3+x}>|x-3|$; 4) $\sqrt{3-x}<\sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$.

191 При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$; 2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.



Показательная функция

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

Показательная функция, ее свойства и график



В главе I рассматривалась степень с действительным показателем. Напомним основные свойства степени. Пусть $a > 0$, $b > 0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \qquad (1)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}, \qquad (2)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \qquad (3)$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \qquad (5)$$

$$a^x > 0, \qquad (6)$$

$$a^x > 1, \text{ если } a > 1,\ x > 0, \qquad (7)$$

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1,\ x_1 < x_2, \qquad (8)$$

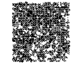
$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1,\ x_1 < x_2. \qquad (9)$$

В практике часто используются функции $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (0{,}1)^x$ и т. д., т. е. функция вида $y = a^x$, где a — заданное число, x — перемен-

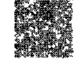
ная. Такие функции называют *показательными*. Это название объясняется тем, что аргументом показательной функции является показатель степени, а основанием степени — заданное число.

Показательной функцией **называется функция $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.**

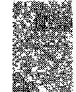
Показательная функция обладает следующими свойствами:


1) Область определения показательной функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

● Это свойство следует из того, что степень a^x, где $a > 0$, определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. ○


2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.

● Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, не имеет корней, если $b \leqslant 0$, и имеет корень при любом $b > 0$. По свойству степени (6) это уравнение не имеет корней, если $b \leqslant 0$. То, что это уравнение имеет корень при любом $b > 0$, доказывается в курсе высшей математики. Это означает, что любая прямая $y = b$, где $b > 0$, пересекается с графиком показательной функции. ○


3) Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

● Это следует из свойств (8) и (9). ○

Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, используя рассмотренные свойства и построив несколько точек, принадлежащих графику (рис. 34). Отметим, что график функции $y = 2^x$ проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x < 0$ и убывает, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает ее); если $x > 0$ и возрастает, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $a > 1$ (рис. 35, *а*).

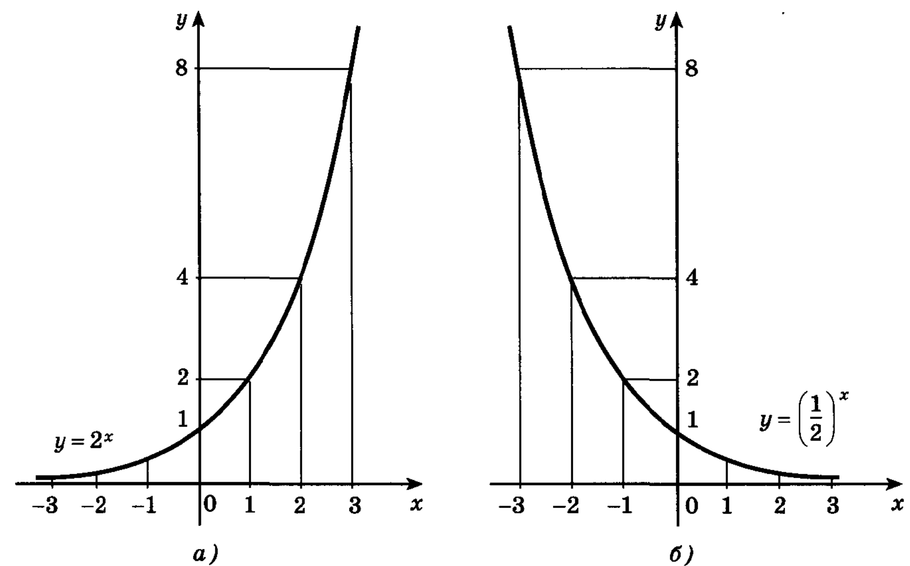


Рис. 34

График функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x > 0$ и возрастает, то график быстро приближается к оси Ox (не пересекая ее); если $x < 0$ и убывает, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $0 < a < 1$ (рис. 35, *б*).

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад описывается формулой

$$m\,(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \qquad (10)$$

где $m\,(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$, T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

С помощью показательной функции выражается давление воздуха в зависимости от высоты подъема, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т. д.

Задача 1 Решить уравнение $3^x = 27$.

▶ По свойству (2) показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27 > 0$. Одним из

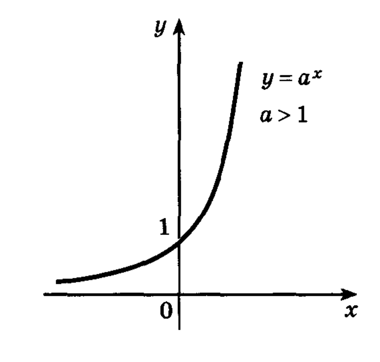


Рис. 35

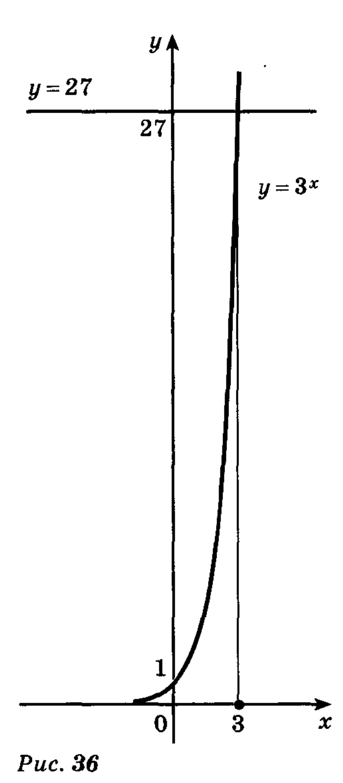


Рис. 36

корней является число $x = 3$, так как $3^3 = 27$. Других корней нет, так как функция $y = 3^x$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому $3^x > 27$ при $x > 3$ и $3^x < 27$ при $x < 3$ (рис. 36).

Ответ $x = 3$. ◁

Задача 2* Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8 г?

▶ Воспользуемся формулой (10). В данной задаче $t = 10 \cdot 365$ (считаем, что в году 365 дней), $T = 140$, $\frac{t}{T} = \frac{365}{14}$.

Вычисления можно провести на микрокалькуляторе так:

$$365 \boxed{\div} 14 \boxed{=} \boxed{x \to \Pi} 0{,}5 \boxed{y^x} \boxed{\Pi \to x} =$$

$$= \boxed{\times} 8 \boxed{=} \underline{1{,}1345} \cdot \underline{10^{-7}}.$$

Ответ Через 10 лет плутония останется примерно $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г. ◁

Упражнения

192 Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

193 Используя график функции $y = 3^x$, найти приближенное значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

194 Изобразить схематически график функции:

1) $y = 0,4^x$; 2) $y = (\sqrt{2})^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y = (\sqrt{3})^x$.

195 (Устно.) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1,7^3$ и 1; 2) $0,3^2$ и 1; 3) $3,2^{1,5}$ и $3,2^{1,6}$;

4) $0,2^{-3}$ и $0,2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$.

196 Сравнить с единицей число:

1) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; 2) $(3,5)^{0,1}$; 3) $\pi^{-2,7}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

197 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$.

198 (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x = \frac{1}{5}$; 2) $7^x = 49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \sqrt[3]{7}$.

199 (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = 0,3^{-x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$; 3) $y = 1,3^{-2x}$; 4) $y = 0,7^{-3x}$.

200 Используя графики функций, решить неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; 3) $5^x > 5$; 4) $5^x < \frac{1}{5}$.

201 Построить график функции:

1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; 3) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = 3^{x\quad 2}$.

202 Доказать, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

203 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке [−1; 2].

204 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке [−1; 1].

205 Построить график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y = |3^x - 2|$; 4) $y = 2 - 3^x$.

206 При радиоактивном распаде количество вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? через 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

207 На некотором лесном участке можно заготовить $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.



§ 12 Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1 Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

▶ Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

▶ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

▶ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $3^x = 7^x$.

▶ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ $x = 0$. ◁

Задача 5 Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

▶ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

▶ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 7 Решить уравнение

$$5^{2x^2-5x} = 5^{x^2+2x-10}. \qquad (1)$$

▶ Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \qquad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в вычислениях).

Задача 8 Решить уравнение $3^{|x-1|} = 3^{|x+3|}$.

▶ Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|x - 1| = |x + 3|$.

Возводя это уравнение в квадрат, получаем его следствие $(x - 1)^2 = (x + 3)^2$, откуда

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9, \quad 8x = -8, \quad x = -1.$$

Проверка показывает, что $x = -1$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. ◁

Упражнения

Решить уравнение (208—223).

208 1) $4^{x-1} = 1$; 2) $0{,}3^{3x-2} = 1$; 3) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x = \frac{1}{3}$; 2) $400^x = \frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$.

210 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$; 4) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} = 2$;

5) $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; 2) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$;

3) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$; 4) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$.

212 1) $5^x = 8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x = 5^{2x}$; 4) $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; 2) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$;

3) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; 4) $64^x - 8^x - 56 = 0$.

214 1) $3^{x^2+x-12} = 1$; 2) $2^{x^2-7x+10} = 1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{-\frac{1}{x+1}}$.

215 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1} = 1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x}$.

216 1) $10^x = \sqrt[3]{100}$; 2) $10^x = \sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2-24} = 15$

4) $10^x = \frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x = 10^{x^2-x}$.

217 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0,7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0,7^{-2}=0,7^{\sqrt{x}}$.

218 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$.

219 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

220 1) $(0,5)^{x^2-4x-3}=(0,5)^{2x^2-x+3}$; 2) $(0,1)^{3+2x}=(0,1)^{2-x^2}$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.

221 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1,5^{|5-x|}=1,5^{|x-1|}$;

3) $3^{|x-1|}=3^{|2-x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

222 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$.

223 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x-1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; 6) $5^{3x-1}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$.

224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решить уравнение (**225—226**).

225 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot 3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

226 1) $4\cdot 9^x-13\cdot 6^x+9\cdot 4^x=0$;

2) $16\cdot 9^x-25\cdot 12^x+9\cdot 16^x=0$.

227 Доказать, что уравнение имеет только один корень $x=1$:

1) $4^x+25^x=29$; 2) $7^x+18^x=25$.

Показательные неравенства



Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 1 Решить неравенство $3^x < 81$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

Ответ $x < 4$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

▶ Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ $x < -\frac{3}{2}$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $3^{x^2 - x} < 9$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^{x^2 - x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

Ответ $-1 < x < 2$. ◁

Задача 4 Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

▶ Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2$, $4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ $x > 0$. ◁

Задача 5 Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$.

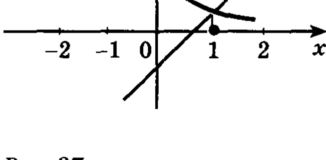


Рис. 37

▶ Построим графики функций

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{и} \quad y = x - \frac{2}{3}$$

(рис. 37). Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ и $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Покажем, что других корней нет. Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая, а функция $y = x - \frac{2}{3}$ возрастающая. Следовательно, при $x > 1$ значения первой функции меньше $\frac{1}{3}$, а второй больше $\frac{1}{3}$; при $x < 1$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{1}{3}$, а второй меньше $\frac{1}{3}$.

Геометрически (см. рис. 37) это означает, что графики этих функций при $x > 1$ и $x < 1$ «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при $x \neq 1$.

Ответ $x = 1$. ◁

Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$ выполняется при $x < 1$, а неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$ — при $x > 1$.

Задача 6* Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$.

▶ Так как $0 < \frac{2}{5} < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x} < x$.

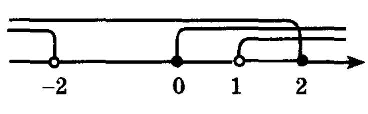


Рис. 38

Область определения этого неравенства $x \leqslant 2$. При $x \leqslant 0$ оно не имеет решений, так как $\sqrt{2-x} \geqslant 0$. Итак, решения неравенства содержатся в промежутке $0 < x \leqslant 2$.

Возводя неравенство в квадрат, получаем $2 - x < x^2$, откуда $x^2 + x - 2 > 0$, $x < -2$ или $x > 1$ (рис. 38).

Ответ $1 < x \leqslant 2$. ◁

Упражнения

Решить неравенство **(228—229)**.

228 1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; 5) $2^{3x} \geqslant \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.

229 1) $5^{x-1} \leqslant \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18} < 1$.

230 Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x = -x - \frac{7}{4}$; 4) $3^x = 11 - x$.

Решить неравенство **(231—232)**.

231 1) $2^{-x^2+3x} < 4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$;

3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \leqslant 7\frac{1}{9}$.

232 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;

3) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$; 4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$.

233 Найти целые решения неравенства на отрезке [–3; 3]:

1) $9^x - 3^x - 6 > 0$; 2) $4^x - 2^x < 12$;

3) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$; 4) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$.

234 Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{25^x-5^x}$; 2) $y=\sqrt{4^x-1}$.

235 При каких значениях x значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$?

236 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x \leqslant 9-\frac{1}{3}x$; 4) $3^x > -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

237 Решить графически уравнение:

1) $2^x = 3-2x-x^2$; 2) $3^{-x}=\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^3-1$.

238 Решить неравенство:

1) $11^{\sqrt{x+6}}>11^x$; 2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}}>0{,}3^x$.

239 Решить неравенство:

1) $0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5$; 2) $25\cdot 0{,}04^{2x}>0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x-3^x}<4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1}<0$.



§ 14 Системы показательных уравнений и неравенств

Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений и неравенств.

Задача 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y=-1, \\ 4^{x+y^2}=16. \end{cases}$

▶ Решим эту систему способом подстановки:

$$x=-2y-1,\quad 4^{-2y-1+y^2}=4^2,$$

откуда $-2y-1+y^2=2$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=3$, $y_2=-1$. Найдем значения x:

$$x_1=-2\cdot 3-1=-7,\quad x_2=-2\cdot(-1)-1=1.$$

Ответ $(-7; 3)$, $(1; -1)$. ◁

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases}3^{y+1}-2^x=5,\\4^x-6\cdot 3^y+2=0.\end{cases}$

▶ Обозначим $2^x=u$, $3^y=v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases}3v-u=5,\\u^2-6v+2=0.\end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$u=3v-5,\ (3v-5)^2-6v+2=0,$$

$$9v^2-36v+27=0,\ v^2-4v+3=0,\ v_1=1,\ v_2=3.$$

Найдем значения u: $u_1=-2$, $u_2=4$. Возвратимся к принятым обозначениям:

1) $2^x=-2$, $3^y=1$. Так как первое из этих уравнений корней не имеет, то решений системы в этом случае нет.

2) $2^x=4$, $3^y=3$, откуда $x=2$, $y=1$.

Ответ $(2; 1)$. ◁

Задача 3* Решить систему уравнений $\begin{cases}2^x\cdot 9^y=162,\\3^x\cdot 4^y=48.\end{cases}$

▶ Перемножив уравнения данной системы, получим

$$6^x\cdot 36^y=3^4\cdot 2\cdot 6\cdot 2^3,\ \text{или}\ 6^{x+2y}=6^5,$$

откуда $x=5-2y$.

Тогда второе уравнение системы примет вид $3^{5-2y}4^y=48$, или $\left(\frac{4}{9}\right)^y=\frac{48}{3^5}=\left(\frac{4}{9}\right)^2$, откуда $y=2$, $x=1$.

Ответ $(1; 2)$. ◁

Задача 4 Решить систему $\begin{cases}3^{x\;\;1}\leqslant\sqrt{3},\\(0{,}2)^{3x^2-2}=(0{,}2)^{2x^2+x+4}.\end{cases}$

▶ Решим неравенство $3^{x-1}\leqslant\sqrt{3}$, т. е. неравенство $3^{x-1}\leqslant 3^{\frac{1}{2}}$. Решая, получаем $x-1\leqslant\frac{1}{2}$, $x\leqslant 1{,}5$.

Теперь решим уравнение $0{,}2^{3x^2-2}=0{,}2^{2x^2+x+4}$,

$$3x^2-2=2x^2+x+4,$$
$$x^2-x-6=0,\ x_1=-2,\ x_2=3.$$

Так как $3>1{,}5$, $-2<1{,}5$, то $x=-2$.

Ответ $x=-2$. ◁

Задача 5* Решить систему $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\4^x=4^{7-y},\\2^x<2^y.\end{cases}$

▶ Решим сначала систему уравнений $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\4^x=4^{7-y}.\end{cases}$

Получаем $\begin{cases}xy=10,\\x=7-y,\end{cases}$ $\begin{cases}xy=10,\\x+y=7.\end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, находим два решения (2; 5), (5; 2).

Теперь решим неравенство $2^x<2^y$. Так как $2>1$, то $x<y$.

Решение системы уравнений (2; 5) удовлетворяет неравенству $x<y$, а решение (5; 2) ему не удовлетворяет.

Ответ (2; 5). ◁

Упражнения

Решить систему уравнений (240—243).

240 1) $\begin{cases}2x-y=1,\\5^{x+y}=25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2,\\3^{x^2-y}=\frac{1}{9};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=1,\\2^{x-y}=8;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y=3,\\3^{x-y}=81.\end{cases}$

241 1) $\begin{cases}4^x\cdot2^y=32,\\3^{8x+1}=3^{3y};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^{3x-2y}=81,\\3^{6x}\cdot3^y=27.\end{cases}$

242 1) $\begin{cases}2^x+2^y=6,\\2^x-2^y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x+5^y=8,\\3^x-5^y=-2.\end{cases}$

243 1) $\begin{cases}5^x-5^y=100,\\5^{x-1}+5^{y-1}=30;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x-9\cdot3^y=7,\\2^x\cdot3^y=\frac{8}{9};\end{cases}$

3) $\begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^{x+1} \cdot 3^y = 75, \\ 3^x \cdot 5^{y-1} = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 4, \\ 3^y \cdot 2^x = 9. \end{cases}$

Решить систему (244—245).

244 1) $\begin{cases} 5^{2x+1} > 625, \\ 11^{6x^2-10x} = 11^{9x-15}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2-47x} = 0{,}3^{-10x-7}, \\ 3{,}7^{x^2} = 3{,}7^4. \end{cases}$

245 1) $\begin{cases} (5^x)^y = 5^{21}, \\ 5^x \cdot 5^y = 5^{10}, \\ 3^x > 3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (0{,}2^y)^x = 0{,}008, \\ (0{,}4)^y = 0{,}4^{3{,}5-x}, \\ 2^x \cdot 0{,}5^y < 1. \end{cases}$

Упражнения к главе III

246 Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

247 Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

248 (Устно.) Является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y = 0{,}78^x$; 2) $y = 1{,}69^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y = 4^{-x}$?

249 В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1; 2]$:

1) $y = 5^x$; 2) $y = 5^{-x}$?

Решить уравнение (250—252).

250 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

251 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;

3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

252 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; 2) $9^x-3^x-6=0$;

3) $3^x+9^{x-1}-810=0$; 4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

253 Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$; 3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

254 Решить графически уравнение:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

Проверь себя!

1 Построить схематически график функции:

1) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; 2) $y=5^x$.

2 Сравнить числа:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; 2) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

3 Решить уравнение:

1) $3^{x+1}=27^{x-1}$; 2) $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$;

3) $2^{x+3}-2^{x+1}=12$; 4) $4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0$.

4 Решить неравенство:

1) $7^{x-2}>49$; 2) $0{,}5^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}$.

255 Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях $x=1, 2, 3, \dots$ является геометрической прогрессией.

256 За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

257 Построить график функции:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$; 3) $y=2^{2-x}+3$.

Решить уравнение (258—260).

258 1) $0{,}6^{x} \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

259 1) $2 \cdot 3^{3x-1} + 27^{x-\frac{2}{3}} = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22 \cdot 9^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{x+3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2} = 4$;

4) $5 \cdot 4^{x-1} - 16^{x} + 0{,}25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = 0$.

260 1) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x}$;

2) $5^{2x} - 7^{x} - 5^{2x} \cdot 17 + 7^{x} \cdot 17 = 0$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $3 \cdot 4^{x} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

261 Решить неравенство:

1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$; 2) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3}(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^{x} - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^{x}$; 4) $\frac{1}{3^{x}+5} \leqslant \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

262 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2^{x-y} = 128, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1} = \frac{1}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 5^{y} = 10, \\ 5^{y} - 2^{x} = 3. \end{cases}$

263 Построить график функции:

1) $y = 2^{x-|x|}$; 2) $y = |3^{|x|} - 3|$.

264 Решить уравнение:

1) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x}$; 2) $4 \cdot 3^{x} - 9 \cdot 2^{x} = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2 \cdot 4^{x} - 3 \cdot 10^{x} - 5 \cdot 25^{x} = 0$; 4) $4 \cdot 9^{x} + 12^{x} - 3 \cdot 16^{x} = 0$.

265 Решить неравенство:

1) $3^{|x-2|} < 9$; 2) $4^{|x+1|} > 16$;

3) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$; 4) $5^{|x-4|} < 25^{|x|}$.



Логарифмическая функция

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П. С. Лаплас

§ 15 Логарифмы

Задача 1 Найти положительный корень уравнения $x^4 = 81$.

▶ По определению арифметического корня имеем $x = \sqrt[4]{81} = 3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $3^x = 81$.

▶ Запишем данное уравнение так: $3^x = 3^4$, откуда $x = 4$. ◁

В задаче 1 неизвестным является основание степени, а в задаче 2 — показатель степени.

Способ решения задачи 2 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 3. Но уже, например, уравнение $3^x = 80$ таким способом решить не удается. Однако это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие логарифма числа. В § 11 было сказано, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, имеет единственный корень. Этот корень называют *логарифмом числа b по основанию a* и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 81$ является число 4, т. е. $\log_3 81 = 4$.

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$; $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$.

Определение логарифма можно кратко записать так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством*.

Например, $4^{\log_4 5} = 5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$, $13^{\log_{13} \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x = \log_3 80$ является корнем уравнения $3^x = 80$. В самом деле, $3^{\log_3 80} = 80$.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*.

Задача 3 Вычислить $\log_{64} 128$.

▶ Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Ответ $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$. ◁

Задача 4 Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

▶ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим

$$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}. \ ◁$$

Задача 5 Решить уравнение $\log_3 (1 - x) = 2$.

▶ По определению логарифма $3^2 = 1 - x$, откуда $x = -8$. ◁

Задача 6 При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

▶ Так как основание логарифма $5>0$ и $5\neq 1$, то данный логарифм существует только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x}>0$. Решая это неравенство, находим $1<x<2$. ◁

Упражнения

266 Найти логарифмы чисел по основанию 3:
$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{243},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ 9\sqrt[4]{3}$.

Вычислить (267—276).

267 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

268 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

269 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$; 4) $\log_3 1$.

270 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3}$; 3) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

271 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0{,}125$;
4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

272 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

273 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

274 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

275 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

276 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

277 Решить уравнение:
1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5-x) = 3$;
4) $\log_3 (x+2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} (0{,}5+x) = -1$.

278 Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2) $\log_{0,2}(7-x)$; 3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; 5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$; 6) $\log_{0,7}(-2x^3)$.

Вычислить (279—281).

279 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$.

280 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

281 1) $\log_2 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$; 3) $2\log_{27} \log_{10} 1000$;

4) $\frac{1}{3}\log_9 \log_2 8$; 5) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

282 Решить уравнение:

1) $\log_x 27 = 3$; 2) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; 3) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение (283—284).

283 1) $\log_6(49-x^2)$; 2) $\log_7(x^2+x-6)$; 3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$.

284 1) $\log_3(1-x^3)$; 2) $\log_2(x^3+8)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$.

Решить уравнение (285—287).

285 1) $2^x = 5$; 2) $1{,}2^x = 4$; 3) $4^{2x-3} = 5$; 4) $7^{1-2x} = 2$.

286 1) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$; 2) $9^x - 3^x - 12 = 0$;

3) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 5\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 = 0$.

287 1) $(3^x + 2^x)(3^x + 3\cdot 2^x) = 8\cdot 6^x$;

2) $(3\cdot 5^x + 2{,}5\cdot 3^x)(2\cdot 3^x - 2\cdot 5^x) = 8\cdot 15^x$.

288 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_x(2x-1)$; 2) $\log_{x-1}(x+1)$?

289 Решить относительно x уравнение

$$9^x + 9a(1-a)\cdot 3^{x-2} - a^3 = 0.$$

§ 16 Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \quad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad (2)$$

$$\log_a b^r = r \log_a b. \quad (3)$$

● По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \quad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \quad (5)$$

1) Перемножая равенства (4) и (5), получаем

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив равенства (4) и (5), получим

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r, получаем $a^{r \log_a b} = b^r$, откуда по определению логарифма следует формула (3). ○

Приведем примеры применения формул (1) — (3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$;

3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}$.

Задача Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

▶ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} =$$

$$= \log_5 25 = 2. \ \triangleleft$$

Упражнения

Вычислить (290—294).

290 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

291 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

292 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

293 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

294 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$

295 Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$:

1) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$; 2) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

296 Вычислить:

1) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;

3) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$; 4) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$.

297 Найти x по данному его логарифму ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$;

2) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$;

4) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

298 Вычислить:

1) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $16^{1-\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 - 3\log_8 5}$;

4) $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

299 Доказать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$. Используя эту формулу, вычислить:

1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$; 2) $2\log_{25} 30 + \log_{0,2} 6$.

300 Выразить через a и b:

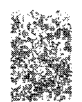
1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$;

2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5 = a$.



§ 17 Десятичные и натуральные логарифмы

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том, и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.


Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.


Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Иррациональное число e играет важную роль в математике и ее приложениях. Число e можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Вычисление числа e на микрокалькуляторе проводится по программе

1 [F] [e^x] <u>2,7182818</u>.

Вычисления на МК-51 $\lg b$ и $\ln b$ проводятся соответственно по программам

b [lg] и b [ln].

Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

13 [lg] <u>1,1139433</u>;

вычисляя $\ln 13$, получаем

13 [ln] <u>2,5649493</u>.

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Докажем справедливость формулы (1).

●* Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. Возьмем от обеих его частей логарифмы по основанию c:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$; откуда $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ○

Из формулы (1) при $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \qquad (2)$$

Задача 1 С помощью микрокалькулятора МК-51 вычислить $\log_3 80$.

▶ 1) С помощью десятичных логарифмов:

80 [lg] [÷] 3 [lg] [=] <u>3,9886927</u>.

2) С помощью натуральных логарифмов:

80 [ln] [÷] 3 [ln] [=] 3,9886928.

Ответ $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ◁

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача 2 Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \dfrac{3}{2}$.

▶ По формуле перехода $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 x}{2}$.

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x = \dfrac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ◁

Задача 3* Двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через n лет становится равным $a\,(1{,}02)^n$, а трехпроцентный вклад становится равным $a\,(1{,}03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

▶ 1) Для первого вклада $2a = a\,(1{,}02)^n$, откуда $(1{,}02)^n = 2$, $n = \log_{1,02} 2$. Вычисления проведем на МК-51:

2 [ln] [÷] 1,02 [ln] [=] <u>35,002788</u>.

2) Для второго вклада $n = \log_{1,03} 2$ и программа вычислений такова:

2 [ln] [÷] 1,03 [ln] [=] <u>23,449772</u>.

Ответ По первому вкладу примерно через 35 лет, а по второму — через 23,5 года. ◁

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (**301—302**).

301 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg \frac{2}{3}$.

302 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln \frac{6}{7}$.

303 Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0,75} 1{,}13$.

304 Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0,7} 9$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23$.

305 Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:

1) $\log_5 3$; 2) $\lg 6$; 3) $\log_2 7$; 4) $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\lg 7$; 6) $\log_3 7$.

306 Вычислить: 1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

307 Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;

3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

308 Дано: $\log_7 2 = m$. Найти: $\log_{49} 28$.

309 Дано: $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$. Найти: $\log_{15} 30$.

310 Дано: $\log_6 2 = m$. Найти: $\log_{24} 72$.

311 Дано: $\log_{36} 8 = m$. Найти: $\log_{36} 9$.

312 Вычислить:

1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$.

313 Решить уравнение:

1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$;

2) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$;

3) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1{,}5 = 0$;

4) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$.

314 Вычислить (не используя микрокалькулятор):

1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$.

315 Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

316 При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется 1,2% имеющегося в нем воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\frac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

317 Вычислить на микрокалькуляторе приближенное значение числа e по формуле $e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}$ при: 1) $n = 7$; 2) $n = 8$; 3) $n = 9$; 4) $n = 10$.



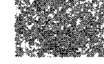
§ 18 Логарифмическая функция, ее свойства и график

В математике и ее приложениях часто встречается *логарифмическая функция*

$$y = \log_a x,$$

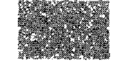
где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:



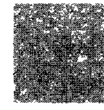
1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

● Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x > 0$. ○



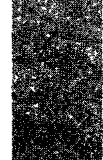
2) Множество значений логарифмической функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

● Это следует из того, что для любого действительного числа b есть такое положительное число x, что $\log_a x = b$, т. е. уравнение $\log_a x = b$ имеет корень. Такой корень существует и равен $x = a^b$, так как $\log_a a^b = b$. ○



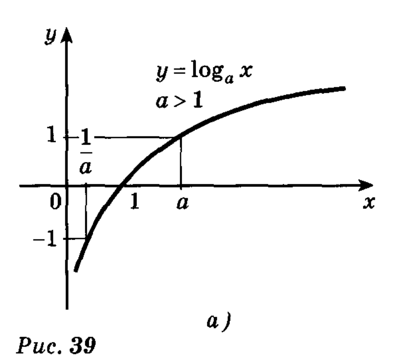
3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

● Пусть $a > 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $y(x_1) < y(x_2)$, т. е. $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, условие $x_1 < x_2$ можно записать так: $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a > 1$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
Пусть $0 < a < 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Записав условие $x_1 < x_2$ в виде $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$, получим $\log_a x_1 > \log_a x_2$, так как $0 < a < 1$. ○
Отметим, что справедливы и следующие два утверждения:
если $a > 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 < x_2$; если $0 < a < 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 > x_2$.



4) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

● Это следует из того, что функция $y = \log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x = 1$ и является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$. ○
Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ следует, что ее график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 39, *а*, если $a > 1$, и на рисунке 39, *б*, если $0 < a < 1$.
На рисунке 40 изображен график функции $y = \log_3 x$, а на рисунке 41 — график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.



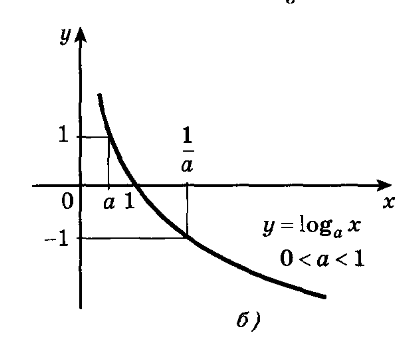


Рис. 39

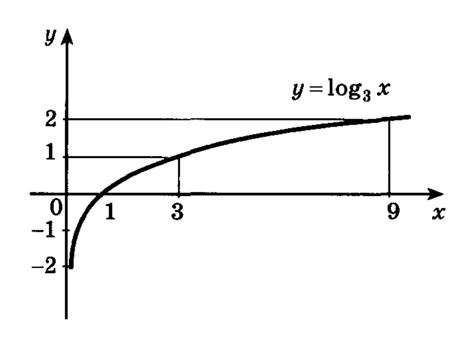


Рис. 40

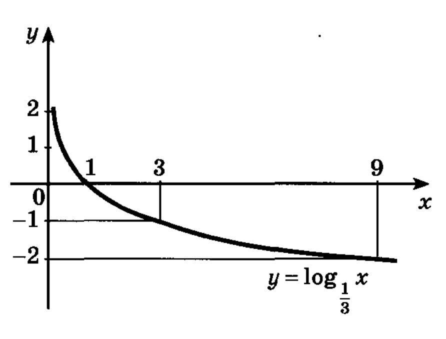


Рис. 41

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0). При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. **Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.**

● Предположим, что $x_1 \neq x_2$, например $x_1 < x_2$. Если $a > 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$; если $0 < a < 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$. ○

Задача 1 Решить уравнение $\log_5 (3x - 2) = \log_5 7$.

▶ Используя доказанную теорему, получаем $3x - 2 = 7$, откуда $3x = 9$, $x = 3$. ◁

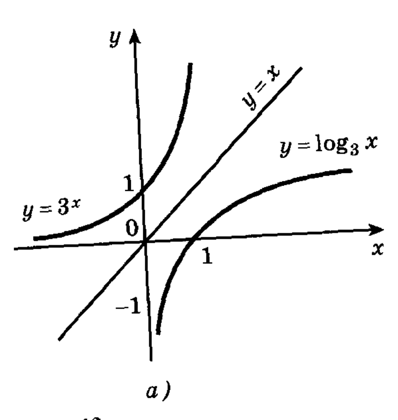
Задача 2 Решить неравенство $\log_2 x < 3$.

▶ Пользуясь тем, что $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, запишем данное неравенство так: $\log_2 x < \log_2 8$. Так как функция $y = \log_2 x$ определена при $x > 0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x < \log_2 8$ выполняется при $x > 0$ и $x < 8$.

Ответ $0 < x < 8$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant -2$.

▶ Запишем данное неравенство так: $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$.



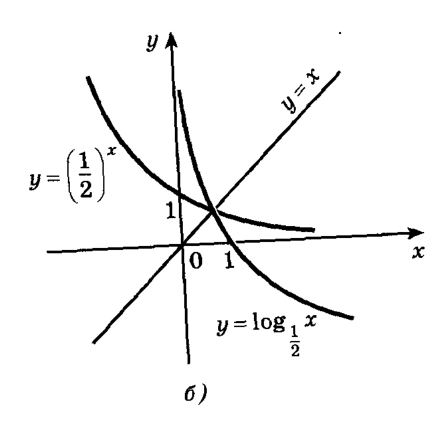
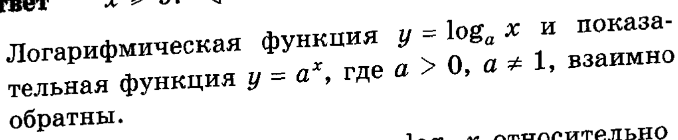


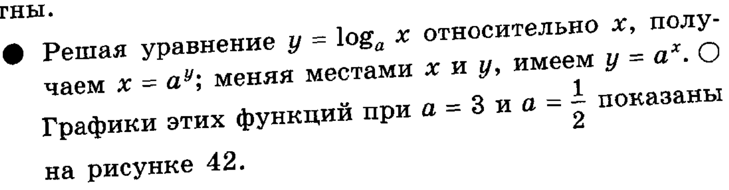
Рис. 42

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убывает, поэтому неравенство выполняется при $x > 0$ и $x \geqslant 9$.

Ответ $x \geqslant 9$. ◁



Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.



● Решая уравнение $y = \log_a x$ относительно x, получаем $x = a^y$; меняя местами x и y, имеем $y = a^x$. ○ Графики этих функций при $a = 3$ и $a = \frac{1}{2}$ показаны на рисунке 42.

Упражнения

318 Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

319 Выяснить, является ли положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6$.

320 Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$; 3) $\log_2 x = 1{,}3$.

321 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

322 Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

323 По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближенно

$$\log_2 3,\ \log_2 0{,}3,\ \log_2 5,\ \log_2 0{,}7.$$

324 Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0,4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство (**325—326**).

325 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

326 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0,4} x > 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$; 4) $\log_{0,4} x \leqslant 2$.

327 Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2$; 2) $\log_5 (3x + 1) = 2$;

3) $\log_4 (2x - 3) = 1$; 4) $\log_7 (x + 3) = 2$;

5) $\lg (3x - 1) = 0$; 6) $\lg (2 - 5x) = 1$.

328 Найти область определения функции:

1) $y = \log_4 (x - 1)$; 2) $y = \log_{0,3} (1 + x)$;

3) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}} (4 - x^2)$.

329 Доказать, что функция $y = \log_2 (x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

330 Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2}$ и $\lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;

3) $3 (\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$; 4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$.

331 Найти область определения функции:

1) $y = \log_8 (x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 5x + 6)$;

3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;

5) $y = \log_\pi (2^x - 2)$; 6) $y = \log_3 (3^{x-1} - 9)$.

332 Построить график функции, найти ее область определения и множество значений:

1) $y = \log_3 (x - 1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$; 3) $y = 1 + \log_3 x$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; 5) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$.

333 Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$;

3) $\lg x = \sqrt{x}$; 4) $\lg x = 2^{-x}$.

334 Построить график функции, найти ее область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

335 Найти область определения функции:

1) $y = \log_2 |3 - x| - \log_2 |x^3 - 8|$;

2) $y = \log_{0,3} \sqrt{x+1} + \log_{0,4} (1 - 8x^3)$.

Логарифмические уравнения



Задача 1 Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

▶ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 (x + 1)(x + 3) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1)(x + 3) = 8, \quad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ $x = 1$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$\log_2 (1 - x) = 3 - \log_2 (3 - x).$$

▶ Перенесем логарифм из правой части в левую:

$$\log_2 (1 - x) + \log_2 (3 - x) = 3,$$

откуда

$$\log_2 (1 - x)(3 - x) = 3,$$

$$(1 - x)(3 - x) = 8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Число $x_1 = 5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x = 5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x = -1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg (2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg (x - 3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg (2x^2 - 4x + 12) = \lg (x^2 + 3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение

$$\log_7 (3x + 4) = \log_7 (5x + 8).$$

▶ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x + 4 = 5x + 8$, откуда $x = -2$. Выполняя проверку, убеждаемся, что при $x = -2$ левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ Корней нет. ◁

Задача 5 Решить уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4 (2x - 1).$$

▶ Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4 (2x - 1) = 0,$$
$$\log_4 (2x - 1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:

1) $\log_4 (2x - 1) = 0$, откуда $2x - 1 = 1$, $x_1 = 1$;

2) $\log_4 x - 2 = 0$, откуда $\log_4 x = 2$, $x_2 = 16$.

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 16$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$.

▶ Уравнение имеет смысл, если

$$x > 0, \ x \neq 1. \qquad (4)$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Если $t = 2$, то $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

Найденные значения x удовлетворяют условиям (4) и являются корнями данного уравнения.

Ответ $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt{3}$. ◁

Задача 7 Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ 4y^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$

▶ Из первого уравнения выразим x через y: $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2$, $\frac{x}{y} = 2$, $x = 2y$. Подставив $x = 2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2 + 2y - 12 = 0$, откуда $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -2$. Найдем значения x: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Проверкой убеждаемся, что $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ — решение системы, а $(-4; -2)$ — постороннее решение.

Ответ $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. ◁

Упражнения

336 Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x - 3 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $|x| = 5$ и $\sqrt{x^2} = 5$;

3) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$;

4) $\log_8 x + \log_8 (x - 2) = 1$ и $\log_8 x (x - 2) = 1$.

Решить уравнение (**337—341**).

337 1) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3$;

2) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 6) = 2$;

3) $\lg (x + \sqrt{3}) + \lg (x - \sqrt{3}) = 0$;

4) $\lg (x - 1) + \lg (x + 1) = 0$.

338 1) $\lg (x - 1) - \lg (2x - 11) = \lg 2$;

2) $\lg (3x - 1) - \lg (x + 5) = \lg 5$;

3) $\log_3 (x^3 - x) - \log_3 x = \log_3 3$.

339 1) $\frac{1}{2} \lg (x^2 + x - 5) = \lg 5x + \lg \frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2} \lg (x^2 - 4x - 1) = \lg 8x - \lg 4x$.

340 1) $\log_3 (5x + 3) = \log_3 (7x + 5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}} (6x + 8)$.

341 1) $\log_7 (x - 1) \log_7 x = \log_7 x$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 2)$;

3) $\log_2 (3x + 1) \log_3 x = 2 \log_2 (3x + 1)$;

4) $\log_{\sqrt{3}} (x - 2) \log_5 x = 2 \log_3 (x - 2)$.

342 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$

Решить уравнение (**343—345**).

343 1) $\log_5 x^2 = 0$; 2) $\log_4 x^2 = 3$; 3) $\log_3 x^3 = 0$; 4) $\log_4 x^3 = 6$;

5) $\lg x^4 + \lg 4x = 2 + \lg x^3$; 6) $\lg x + \lg x^2 = \lg 9x$.

344 1) $\log_4 (x + 2)(x + 3) + \log_4 \frac{x - 2}{x + 3} = 2$;

2) $\log_2 \frac{x - 1}{x + 4} + \log_2 (x - 1)(x + 4) = 2$;

3) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x + 6} = 3$; 4) $\log_2 \frac{x - 4}{x} + \log_2 x^2 = 5$.

345 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$; 2) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$;

3) $\frac{1}{4+\lg x} + \frac{2}{2-\lg x} = 1$; 4) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$.

346 Не решая уравнений, выяснить, равносильны ли они:

1) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x + 1 = -3$;

2) $\log_3 (x - 1) = 2$ и $x - 1 = 9$.

347 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решить уравнение **(348—352)**.

348 1) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$; 2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$;

3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$; 4) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$.

349 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$.

350 1) $\lg (6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x$;

2) $\lg (2^x + x + 4) = x - x\lg 5$.

351 1) $\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1)\lg (x - 1) + 2\lg^2 (x - 1)$;

2) $2\log_5 (4 - x) \cdot \log_{2x} (4 - x) = 3\log_5 (4 - x) - \log_5 2x$.

352 1) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \frac{1}{\log_5 x}$;

2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2 2x$.

353 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.



§ 20 Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведем примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ реше-

ния таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x + 1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x + 1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $x > 3$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2 (x - 3)(x - 2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x - 3)(x - 2) \leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

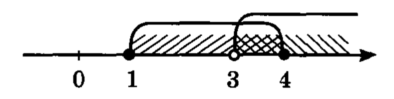
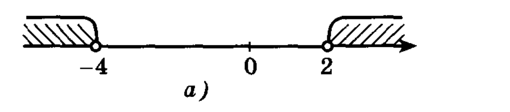
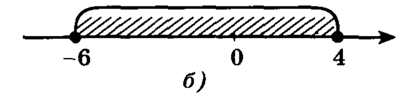


Рис. 43

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая этот отрезок с промежутком $x > 3$, получаем $3 < x \leqslant 4$ (рис. 43). ◁





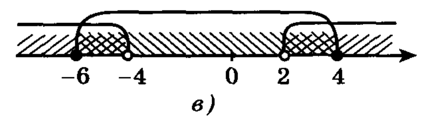


Рис. 44

Задача 3* Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4. \qquad (5)$$

▶ Область определения неравенства находится из условия $x^2 + 2x - 8 > 0$. Неравенство (5) можно записать в следующем виде:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем $x^2 + 2x - 8 \leqslant 16$. Таким образом, исходное неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x < -4$, $x > 2$ (рис. 44, *а*). Решая второе квадратное неравенство, получаем $-6 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 44, *б*). Следовательно, оба неравенства системы выполняются одновременно при $-6 \leqslant x < -4$ и при $2 < x \leqslant 4$ (рис. 44, *в*).

Ответ $-6 \leqslant x < -4$, $2 < x \leqslant 4$.◁

Упражнения

354 Найти область определения функции:

1) $y = \lg(3x - 2)$;
2) $y = \log_2(7 - 5x)$;
3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)$;
4) $y = \log_7(4 - x^2)$.

Решить неравенство (**355—357**).

355 1) $\log_3(x + 2) < 3$; 2) $\log_8(4 - 2x) \geqslant 2$;

3) $\log_3 (x + 1) < -2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geqslant -2$;

5) $\log_{\frac{1}{5}} (4 - 3x) \geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}} (2 - 5x) < -2$.

356 1) $\lg x > \lg 8 + 1$; 2) $\lg x > 2 - \lg 4$;

3) $\log_2 (x - 4) < 1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x + 1)$.

357 1) $\log_{15} (x - 3) + \log_{15} (x - 5) < 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) + \log_{\frac{1}{3}} (12 - x) \geqslant 2$.

358 Найти область определения функции:

1) $y = \log_5 (x^2 - 4x + 3)$; 2) $y = \log_6 \frac{3x + 2}{1 - x}$;

3) $y = \sqrt{\lg x + \lg (x + 2)}$; 4) $y = \sqrt{\lg (x - 1) + \lg (x + 1)}$.

Решить неравенство (**359—367**).

359 1) $\log_5 \frac{3x - 2}{x^2 + 1} > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3}{x - 7} < 0$;

3) $\lg (3x - 4) < \lg (2x + 1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) > \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$.

360 1) $\log_8 (x^2 - 4x + 3x) < 1$; 2) $\log_6 (x^2 - 3x + 2) \geqslant 1$;

3) $\log_3 (x^2 + 2x) > 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} (x^2 - 2{,}5x) < -1$.

361 1) $\lg (x^2 - 8x + 13) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 5x + 7) < 0$;

3) $\log_2 (x^2 + 2x) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x - 6) \geqslant -3$.

362 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$; 2) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) < 1$.

363 1) $\log_{0,2} x - \log_5 (x - 2) < \log_{0,2} 3$;

2) $\lg x - \log_{0,1} (x - 1) > \log_{0,1} 0{,}5$.

364 1) $\log^2_{0,2} x - 5 \log_{0,2} x < -6$; 2) $\log^2_{0,1} x + 3 \log_{0,1} x > 4$.

365 1) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1$; 2) $\log_3 (2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$

3) $\log_{x^2 - 3} (4x + 7) > 0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}} (\sqrt{6} - 2x) < 0$.

366 $\frac{2}{3^x - 1} \leqslant \frac{7}{9^x - 2}$.

367 $4^x (\sqrt{16^{1-x} - 1} + 2) < 4 |4^x - 1|$.

Упражнения к главе IV

Вычислить (368—372).

368 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

369 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

370 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

371 1) $(0,1)^{-\lg 0,3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

372 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0,001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$.

373 Вычислить с помощью микрокалькулятора:
1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0,17$; 4) $\log_{0,3} 8,1$.

374 Построить график функции:
1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей? убывающей? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

375 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:
1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

376 Решить графически уравнение:
1) $\log_3 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$.

377 Найти область определения функции:
1) $y = \log_7 (5 - 2x)$; 2) $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.

Решить уравнение (378—380).

378 1) $\log_{\frac{1}{2}}(7 - 8x) = -2$; 2) $\lg (x^2 - 2) = \lg x$.

379 1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$;

2) $\log_3 (2x^2 + x) = \log_3 6 - \log_3 2$;

3) $\lg^2 x - 3 \lg x = 4$; 4) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0$.

380 1) $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x - 3) = 1$;

2) $\log_3 (5 - x) + \log_3 (-1 - x) = 3$;

3) $\lg (x - 2) + \lg x = \lg 3$;

4) $\log_{\sqrt{6}} (x - 1) + \log_{\sqrt{6}} (x + 4) = \log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство (381—383).

381 1) $\log_2 (x - 5) \leqslant 2$; 2) $\log_3 (7 - x) > 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 1) > -2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} (3 - 5x) < -3$.

382 1) $\log_3 (5 - 4x) < \log_3 (x - 1)$;

2) $\log_{0,3} (2x + 5) \geqslant \log_{0,3} (x + 1)$.

383 1) $\lg (x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_3 (x^2 + 7x - 5) > 1$.

Проверь себя!

1 Вычислить:

1) $\log_5 125$; 2) $\lg 0,01$; 3) $2^{\log_2 3}$; 4) $3^{2 \log_3 7}$;

5) $\log_2 68 - \log_2 17$.

2 Построить схематически график функции:

1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_2 x$.

3 Сравнить числа:

1) $\log_{0,2} 3$ и $\log_{0,2} 2,5$; 2) $\log_2 0,7$ и $\log_2 1,2$.

4 Решить уравнение:

1) $\log_5 (3x + 1) = 2$; 2) $\log_3 (x + 2) + \log_3 x = 1$;

3) $\ln (x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln (x + 3)$.

5 Решить систему уравнений $\begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$

6 Решить неравенство:

1) $\log_3 (x - 1) \leqslant 2$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} (2 - x) > -1$.

384 Вычислить:

1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 3) $2^{2 - \log_2 5}$;

4) $3,6^{\log_{3,6} 10 + 1}$; 5) $2 \log_5 \sqrt{5} + 3 \log_2 8$;

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$.

385 Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9}$ и $\sqrt{8}$.

386 Вычислить $\log_{30} 64$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

387 Вычислить $\log_{36} 15$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

388 При каких значениях x справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$?

389 Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (390—395).

390 1) $3^{4x} = 10$; 2) $2^{3x} = 3$; 3) $1{,}3^{3x-2} = 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x} = 1{,}5$;

5) $16^x - 4^{x+1} - 14 = 0$; 6) $25^x + 2 \cdot 5^x - 15 = 0$.

391 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$;

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$;

4) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9 \log_5 3$.

392 1) $\log_3 (2 - x^2) - \log_3 (-x) = 0$;

2) $\log_5 (x^2 - 12) - \log_5 (-x) = 0$;

3) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$;

4) $\lg (x+6) - \lg \sqrt{2x-3} = \lg 4$.

393 1) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$;

2) $\log_{0,5} (x + 2) - \log_2 (x - 3) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-4x - 8)$.

394 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = 1$;

2) $\frac{1}{2} \log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3 - \log_{x^2} 28 = 1$.

395 1) $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-x} = \log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x$; 4) $\lg \frac{x-4}{x-2} = \lg x$.

Решить неравенство (396—397).

396 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant -1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

397 1) $4\log_4 x-33\log_x 4\leqslant 1$; 2) $\log_x 3\leqslant 4(1+\log_{\frac{1}{3}} x)$.

398 Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному основанию образуют арифметическую прогрессию.

399 Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

400 Построить график функции:

1) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение (401—403).

401 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

402 1) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

403 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3\ x}(1-x)$;

3) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$;

4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$.

404 Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

405 Решить уравнение

$$\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x).$$

406 Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_a x-1}+\frac{1}{\log_a x^2+1}<-\frac{3}{2}.$$



Тригонометрические формулы

Математика есть такая наука, которая показывает, как из знаемых количеств находить другие, нам еще неизвестные.

Д. С. Аничков

Радианная мера угла



Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 45). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ — иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1, равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д. Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

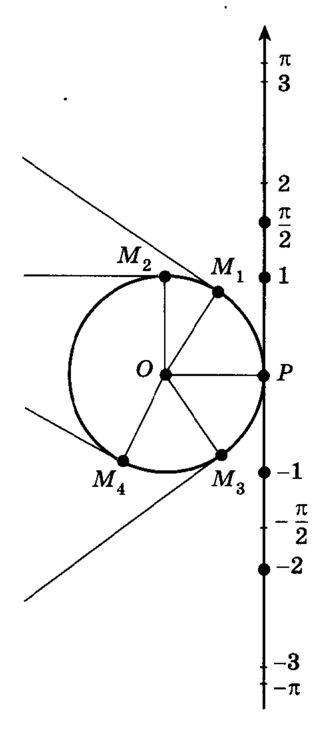


Рис. 45

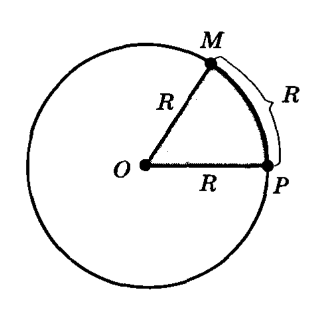
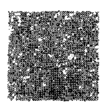


Рис. 46

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$. Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы измеряются в радианной мере, а угол POM_1 называют углом в один радиан (1 рад). Длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM длины R и угол POM (рис. 46).



Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол в π раз меньший, т. е.

$$\textbf{1 рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha \textbf{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}. \quad (1)$$

Задача 1 Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

▶ По формуле (1) находим:

1) π рад = 180°; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад = 90°;

3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^{\circ} = 135°$. ◁

Найдем радианную меру угла в 1°. Так как угол 180° равен π рад, то

$$1° = \frac{\pi}{180} \textbf{ рад}.$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \textbf{ рад}. \quad (2)$$

Задача 2 Найти радианную меру угла, равного:

1) 45°; 2) 15°.

▶ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад;

2) $15° = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ◁

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \qquad (3)$$

Задача 3 Конец минутной стрелки Кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец стрелки за 15 мин?

▶ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

Ответ 4,8 м. ◁

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R = 1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т. д.

Задача 4 Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

▶ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад

в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ◁

Упражнения

407 Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) 40°; 2) 120°; 3) 150°; 4) 75°; 5) 32°; 6) 140°.

408 Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

409 (Устно.) Определить градусную и радианную меру углов: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) квадрата; г) правильного шестиугольника.

410 Вычислить радиус окружности, если дуга длиной 0,36 м стягивает центральный угол в 0,9 рад.

411 Найти радианную меру угла, стягиваемого дугой окружности длиной 3 см, если радиус окружности равен 1,5 см.

412 Дуга кругового сектора стягивает угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

413 Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 $см^2$. Найти угол, который стягивается дугой этого кругового сектора.

414 Заполнить таблицу.

Градусы	0,5	36	159	108				
Радианы					$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{10}\pi$	2,5	1,8

415 Заполнить таблицу.

Угол, °	30					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			2	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	5			10
Площадь сектора, $см^2$				50	25	50

§ 22 Поворот точки вокруг начала координат

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P (1; 0) против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 47). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 48).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

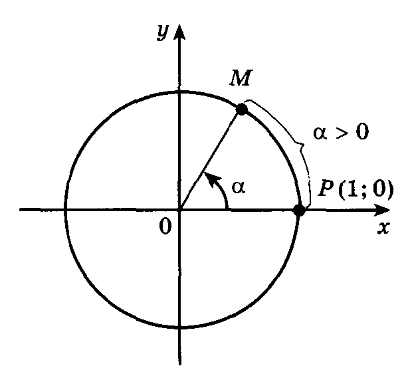


Рис. 47

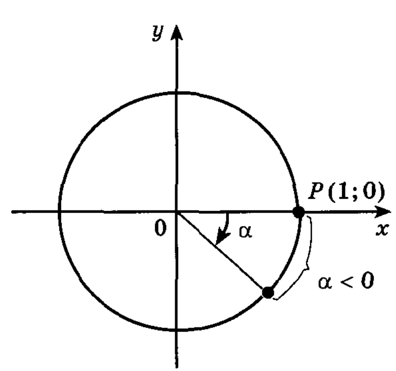


Рис. 48

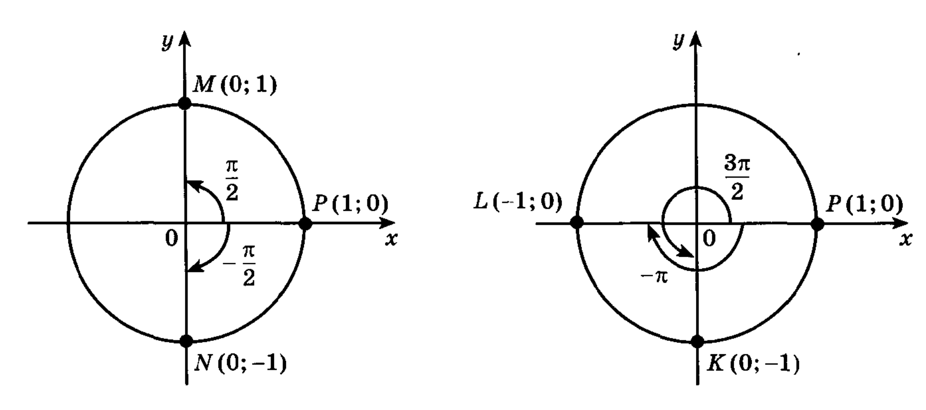


Рис. 49

Рис. 50

Примеры.

1) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка M (0; 1).

2) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка N (0; –1).

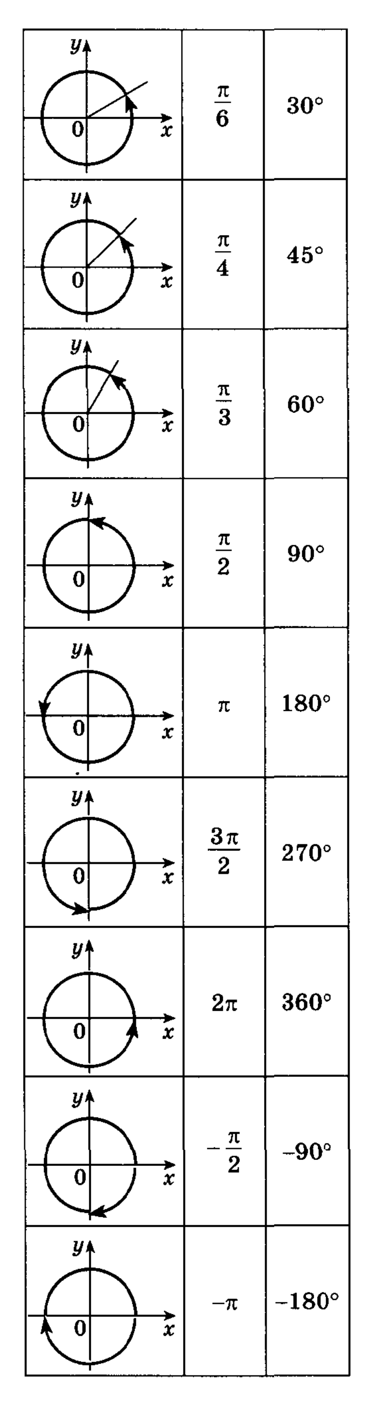
3) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 50) получается точка K (0; –1).

4) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\pi$ рад (рис. 50) получается точка L (–1; 0).

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270°; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на –90°.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мере (рис. 51)

Отметим, что при повороте точки P (1; 0) на 2π, т. е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение (см. рис. 51). При повороте этой точки на -2π, т. е. на $-360°$, она также возвращается в первоначальное положение.



	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	–90°
	$-\pi$	–180°

Рис. 51

y
$\frac{9\pi}{2}$
P (1; 0)
0
x

Рис. 52

y
0
P (1; 0)
x
$-\frac{9\pi}{2}$

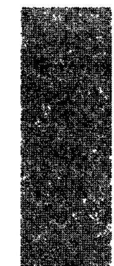
Рис. 53

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52).

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 53).

Заметим, что при повороте точки $P\,(1;\,0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 53).

Вообще, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.



Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на угол α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P\,(1;\,0)$ в точку M (рис. 54).

Задача 1 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

▶ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т.е. получается точка с координатами $(-1;\,0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0;\,-1)$. ◁

Задача 2 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\,0)$, чтобы получить точку $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}\right)$.

▶ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 55) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно,

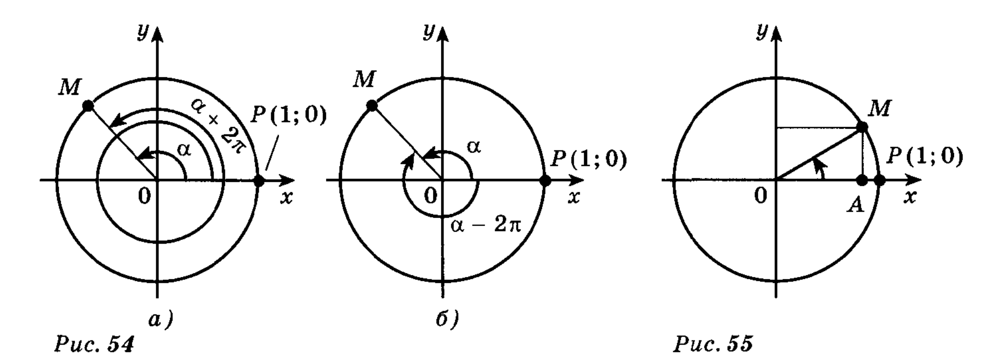


Рис. 54

Рис. 55

все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число. ◁

Упражнения

416 Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол **(417—419)**.

417 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{3}{4}\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{5}{4}\pi$; 6) $-225°$.

418 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

419 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число; 2) $-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, k — целое число; 3) $-\pi + 2\pi k$, k — целое число; 4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — целое число.

420 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

421 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

422 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $\frac{\pi}{2} \pm \pi$; 2) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2} + \pi k$; 4) $-\pi + \pi k$.

423 Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0), чтобы получить точку с координатами:

1) (1; 0); 2) (–1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1).

424 Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

425 Найти число x, где $0 \leqslant x < 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

1) $a = 9{,}8\pi$; 2) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 3) $a = \frac{11}{2}\pi$; 4) $a = \frac{17}{3}\pi$.

426 На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $4{,}5\pi$; 2) $5{,}5\pi$; 3) -6π; 4) -7π.

427 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$.

428 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.



§ 23 Определение синуса, косинуса и тангенса угла

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис. 56):

Определение 1. ***Синусом угла*** **α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin \alpha$).**

Определение 2. ***Косинусом угла*** **α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos \alpha$).**

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

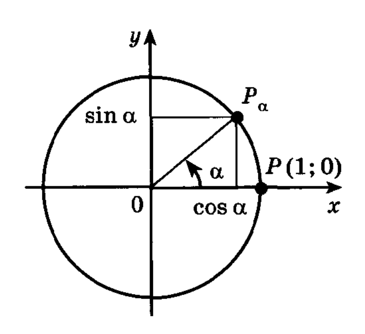


Рис. 56

Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90°, получается точка (0; 1). Ордината точки (0; 1) равна 1, поэтому $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; абсцисса этой точки равна 0, поэтому $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$.

Заметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии. Например,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos\pi = \cos 180° = -1.$$

Задача 1 Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку (–1; 0) (рис. 57). Следовательно, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$. ◁

Задача 2 Найти sin 270° и cos 270°.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдет в точку (0; –1) (рис. 58). Следовательно, $\cos 270° = 0$, $\sin 270° = -1$. ◁

Напомним, что меру угла α (в радианах) можно рассматривать как действительное число. Поэтому sin α и cos α можно рассматривать как числовое выражение. Например, в уравнении $\sin x = \alpha$, где α — заданное число, считается, что x — неизвестное число.

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = 0$.

▶ Решить уравнение $\sin x = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю. Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окруж-

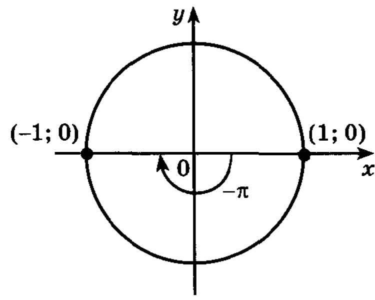


Рис. 57

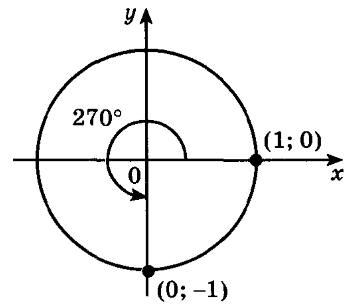


Рис. 58

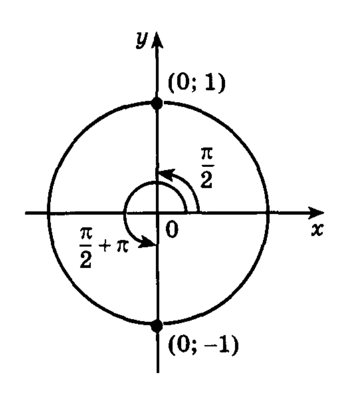


Рис. 59

ности (1; 0) и (−1; 0) (рис. 57). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и т. д., а также на углы $-\pi$, -2π, -3π и т. д. Следовательно, $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где k — любое целое число. ◁

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$, используют запись $k \in \boldsymbol{Z}$ (читается: «k принадлежит $\boldsymbol{Z}$»). Ответ к задаче 3 можно записать так:

$$x = \pi k,\quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 4 Решить уравнение $\cos x = 0$.

▶ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности (0; 1) и (0, −1) (рис. 59). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ и т. д., т. е. на углы $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 5 Решить уравнение: 1) $\sin x = 1$; 2) $\cos x = 1$.

▶ 1) Ординату, равную единице, имеет точка (0; 1) единичной окружности. Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на углы $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ 1) $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Определение 3. ***Тангенсом угла*** **α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).**

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Например,

$$\operatorname{tg}0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Иногда используется котангенс угла α (обозначается ctg α), который определяется формулой

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Например,

$$\operatorname{ctg} 270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отметим, что sin α и cos α определены для любого угла, а их значения заключены от −1 до 1; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos \alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\sin \alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
ctg α	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

Задача 6 Вычислить $4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

▶ Используя таблицу, получаем

$$4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5. \quad \triangleleft$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно

найти по четырехзначным математическим таблицам В. М. Брадиса, а также с помощью микрокалькулятора.

Задача 7 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sin 25°$; 2) $\cos \frac{\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 5$.

▶ На любом микрокалькуляторе вычисления проводятся нажатием одних и тех же клавиш, [sin], [cos], [tg], но перед этим нужно нажимать клавишу [F]. Перед вычислением нужно установить переключатель Р — Г (радиан — градус) в нужном положении.

1) 25 [F] [sin] 0,42261825;

2) [F] [π] 5 [÷] [F] [cos] 0,80901703;

3) 5 [F] [tg] −3,380514.

Ответ 1) 0,42; 2) 0,81; 3) −3,38. ◁

Упражнения

429 Построить на единичной окружности точки, соответствующие числу α, если:

1) $\sin \alpha = 1$; 2) $\sin \alpha = 0$; 3) $\cos \alpha = -1$; 4) $\cos \alpha = 0$;
5) $\sin \alpha = -0{,}6$; 6) $\sin \alpha = 0{,}5$; 7) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

430 Вычислить:

1) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$;
3) $\sin \pi - \cos \pi$; 4) $\sin 0 - \cos 2\pi$;
5) $\sin \pi + \sin 1{,}5\pi$; 6) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

431 Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$; 2) $\beta = 4\pi$; 3) $\beta = 3{,}5\pi$;
4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$; 5) $\beta = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\beta = (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вычислить (432—433).

432 1) $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k + \cos 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

433 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; 2) $\operatorname{tg} 0° - \operatorname{tg} 80°$;

3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$; 4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

434 Найти значение выражения:

1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

2) $5 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$;

4) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

435 Решить уравнение:

1) $2 \sin x = 0$; 2) $\frac{1}{2} \cos x = 0$;

3) $\cos x - 1 = 0$; 4) $1 - \sin x = 0$.

436 Может ли $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ быть равным:

1) 0,049; 2) $-0{,}875$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 + \sqrt{2}$?

437 Найти значение выражения:

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$ при $\alpha = 60°$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

438 Найти значение выражения:

1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$;

2) $2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$;

3) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.

439 Решить уравнение:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$;

3) $\sin 3x = 0$; 4) $\cos 0{,}5x = 0$;

5) $\sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) = 1$; 6) $\cos (5x + 4\pi) = 1$.

440 Используя микрокалькулятор, проверить равенство:

1) $\sin 60° \approx 0{,}866$; 2) $\cos 45° \approx 0{,}707$;

3) $\cos \frac{\pi}{5} \approx 0{,}996$; 4) $\sin \frac{\pi}{13} \approx 0{,}225$.

441 Вычислить с точностью до 0,01, используя микрокалькулятор:

1) $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 4{,}81$; 3) $\sin 38°$; 4) $\cos 45°12'$;

5) $\sin \frac{\pi}{5}$; 6) $\cos \frac{10}{7}\pi$; 7) $\operatorname{tg} 12°$; 8) $\sin \frac{19}{9}\pi$.



§ 24 Знаки синуса, косинуса и тангенса

1. Знаки синуса и косинуса.

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 60, 61).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис. 60, 61). Аналогично в третьей четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, а в четвертой четверти $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ (рис. 60, 61). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса

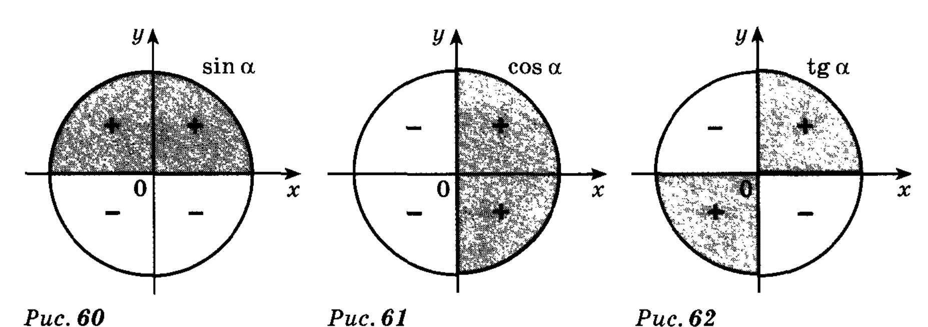


Рис. 60 *Рис. 61* *Рис. 62*

и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Если точка (1; 0) движется по часовой стрелке, то знаки синуса и косинуса также определяются тем, в какой четверти окажется точка; это показано на рисунках 60, 61.

Задача 1 Выяснить знаки синуса и косинуса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

▶ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки (1; 0) на угол 745° соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1; 0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ◁

2. Знаки тангенса.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса изображены на рисунке 62.

Задача 2 Выяснить знак тангенса угла: 1) 260°; 2) 3.

▶ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ◁

Упражнения

442 В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки P (1; 0) на угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$;

6) $\alpha = 4{,}8$; 7) $\alpha = -1{,}31$; 8) $\alpha = -2{,}7$?

443 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 2) $\alpha - \pi$; 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$;

4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; 6) $\pi - \alpha$?

444 Определить знак числа $\sin \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$; 3) $\alpha = \frac{4}{3}\pi$;

4) $\alpha = -0{,}1\pi$; 5) $\alpha = 5{,}1$; 6) $\alpha = -470°$.

445 Определить знак числа $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$;

4) $\alpha = 4{,}6$; 5) $\alpha = -5{,}3$; 6) $\alpha = -150°$.

446 Определить знак числа $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$;

4) $\alpha = 3{,}7$; 5) $\alpha = -1{,}3$; 6) $\alpha = 283°$.

447 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$; 4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$.

448 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3{,}4$; 4) $\alpha = -1{,}3$.

449 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(\alpha - \pi)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; 6) $\sin(\pi - \alpha)$.

450 Каковы знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$?

451 Для каких значений аргумента α, заключенных в промежутке от 0 до 2π, знаки синуса и косинуса совпадают (различны)?

452 Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

453 Сравнить значения выражений:

1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

454 Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi + x) = 1$; 2) $\cos(x + 3\pi) = 0$;

3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1$.

455 В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}4$?



§ 25 Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

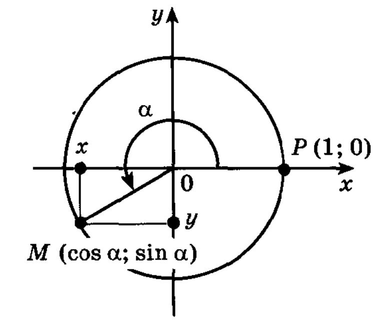


Рис. 63

Выясним *зависимость между синусом и косинусом.*

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 63). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством.*

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1 Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, т. е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «–»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \quad \triangleleft$$

Задача 2 Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

▶ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \triangleleft$$

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.* По определению тангенса и котангенса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Перемножая эти равенства, получаем

$$\mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{ctg}\,\alpha = \mathbf{1}. \quad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ctg}\,\alpha}, \quad (5)$$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\,\alpha}. \quad (6)$$

Равенства (4) — (6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 3 Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 13$.

▶ По формуле (6) находим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. ◁

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. ◁

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем *зависимость между тангенсом и косинусом.*

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$. Получим равенство $\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$\mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}. \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha \neq 0$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Из нее можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ Из формулы (7) получаем

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. ◁

Задача 6 Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Из формулы (7) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$. ◁

Упражнения

456 Может ли синус (косинус) принимать значения:

$$0{,}03,\quad \frac{2}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{11}{13},\ -\frac{13}{11},\ \sqrt{2}?$$

457 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$;

4) $\sin\alpha = 0{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}8$?

458 Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

460 Какие значения может принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

461 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

462 Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

463 Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;
2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;
4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

464 Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;
2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.



§ 26 Тригонометрические тождества

Задача 1 Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (1)$$

▶ По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin \alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α, т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2 Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

▶ $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$ ◁

Задача 3 Доказать тождество $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

▶ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \ ◁$$

При решении задач 1—3 использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4 Доказать тождество $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha.$

► $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ◁

Задача 5 Упростить выражение $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}$.

► $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$

$=\sin\alpha\cos\alpha.$ ◁

Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha;$
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha;$
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha;$
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha;$
5) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1;$
6) $\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1.$

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha-2\sin\alpha;$
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha;$
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha};$
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}.$

467 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

468 Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1$;

2) $\sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

469 Упростить выражение:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha - 1$;

2) $1 - \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$;

3) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

4) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

470 Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\frac{1}{1 + \sin \alpha}$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

4) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

5) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$;

6) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

7) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$;

8) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

471 Найти значение выражения $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0{,}6$.

472 Найти значение выражения $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = 0{,}2$.

473 Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найти $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

474 Решить уравнение:

1) $2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 = 0$;

3) $3 \cos^2 x - 2 \sin x = 3 - 3 \sin^2 x$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \sin x - 1 - 2 \sin^2 x$.

§ 27 Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 64). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\mathbf{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}. \qquad (2)$$

Используя определение тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом,

$$\mathbf{\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

Формулы (1) — (2) справедливы при любых α, а формула (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

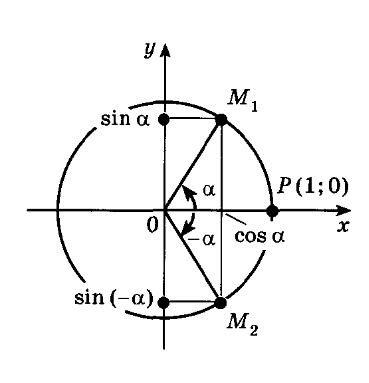


Рис. 64

Формулы (1) — (3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\,\mathrm{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

476 Упростить выражение:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha\,(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\,\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

477 Вычислить:

1) $\frac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

478 Упростить выражение:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

479 Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\mathrm{ctg}^2(-\alpha))=\mathrm{ctg}(-\alpha)$;

2) $\frac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\frac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

480 Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$; 2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$; 4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

Формулы сложения



§ 28

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

● Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки M_0 (1; 0) на углы α, $-\beta$ и $\alpha + \beta$ рад соответственно (рис. 65).

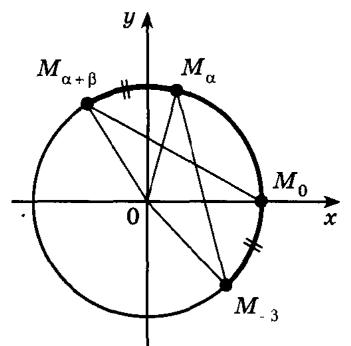
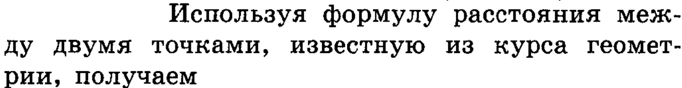


Рис. 65

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$M_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha),$$
$$M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta)).$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно, $(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2$.



Используя формулу расстояния между двумя точками, известную из курса геометрии, получаем

$$(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 =$$
$$= (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) и (2) из § 27:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. ○

Задача 1 Вычислить $\cos 75°$.

▶ По формуле (1) находим
$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° -$
$- \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. ◁

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta),$$

откуда

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.} \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 15°$.

▶ По формуле (2) получаем
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° +$
$+ \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

▶ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\beta + \sin\frac{\pi}{2} \sin\beta = \sin\beta$, т. е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. ◁

Используя формулы (1) — (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\beta =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.} \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta).$$

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.} \qquad (6)$$

Задача 4 Вычислить $\sin 210°$.

▶ $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \sin 30° = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 5 Вычислить $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$.

▶ $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \pi = 0$. ◁

Задача 6* Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

▶ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha \cos\beta$, получим формулу (7). ◁

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим

$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \frac{\operatorname{tg} 180° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 180° \operatorname{tg} 45°} = 1$.

Упражнения

481 С помощью формул сложения вычислить:

1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

482 Вычислить, не пользуясь таблицами:

1) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;

2) $\cos 19°30' \cos 25°30' - \sin 19°30' \sin 25°30'$;

3) $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$.

483 Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

484 Упростить выражение:

1) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha$;

2) $\cos 5\beta \cos 2\beta - \sin 5\beta \sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

485 Вычислить, не пользуясь таблицами:

1) $\sin 73° \cos 17° + \cos 73° \sin 17°$;

2) $\sin 73° \cos 13° - \cos 73° \sin 13°$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

487 Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

488 Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

489 Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

490 Вычислить $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

491 Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.

492 Доказать тождество:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$;

2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

6) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

493 Вычислить:

1) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi-\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$;

3) $\frac{1+\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}$;

4) $\frac{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}$.

494 Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

495 Упростить выражение $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

496 Упростить выражение:

1) $\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin5\beta\cos3\beta-\sin3\beta\cos5\beta$.

497 Решить уравнение:

1) $\cos6x\cos5x+\sin6x\sin5x=-1$;

2) $\sin3x\cos5x-\sin5x\cos3x=-1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=1$.

Синус, косинус и тангенс двойного угла



29

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ По формуле (1) находим
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha$.
Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◁

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

▶ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

▶ $$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$ ◁

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

▶ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ (см. § 28) $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \ \triangleleft$$

Задача 5* Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

▶ $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha =$
$= \sin\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha \, 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$
$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) -$
$- \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha).$
При $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. ◁

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (**498—499**).

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos\frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (**500—502**).

500 1) $2\sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2 \sin 75° \cdot \cos 75°$; 2) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;

3) $\frac{6 \operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22°30' - 1}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (**506—507**).

506 1) $2 \cos 40° \cdot \cos 50°$; 2) $2 \sin 25° \cdot \sin 65°$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$; 2) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$;

2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;

5) $\frac{(1 - 2 \cos^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha - 1)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \alpha$; 7) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

512 Решить уравнение:

1) $\sin 2x - 2 \cos x = 0$; 2) $\cos 2x + \sin^2 x = 1$;

3) $4 \cos x = \sin 2x$; 4) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

5) $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$; 6) $\cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$.

Синус, косинус и тангенс половинного угла



По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ с точностью до знака. Знак может быть определен, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1 Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (5) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49.$

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\mathbf{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (7)$$

Задача 2 Вычислить $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

▶ По формуле (7) имеем

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2}$.

▶ $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} =$

$= \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

▶ Так как $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x = 2\cos x$, откуда

$$\cos x\,(\cos x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n).

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 5 Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

▶ 1) $\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (8)$$

2) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (9)$$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

Эту формулу можно также получить почленным делением формул (8) и (9). ◁

Итак, по формулам (8) — (10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

513 Выразить значения функции данного аргумента через значения функции удвоенного аргумента:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2\frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\mathrm{tg}\,22°30'$; 4) $\mathrm{ctg}\,22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Доказать тождество (**519—520**).

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^4\,\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

521 Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522 Упростить выражение $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{tg}\,4\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha}$.

523 Решить уравнение:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $1+\cos 8x=2\cos 4x$;

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

Формулы приведения

§ 31

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P\,(1;\ 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁

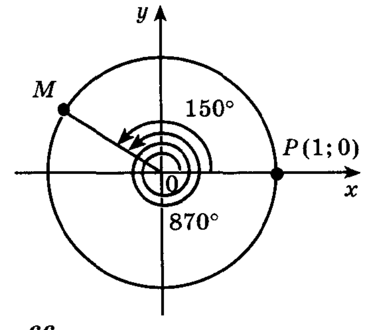


Рис. 66

Рис. 67

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ,\quad \cos(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \tag{1}$$

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ,\quad \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ. \tag{2}$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α. Следовательно, верны формулы

$$\mathbf{\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z.} \tag{3}$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{4}$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

● Применяя формулу сложения для синуса, получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$. ○

Аналогично доказывается и вторая из формул (4), которые называются *формулами приведения*. Вообще, формулами приведения для синуса называют следующие шесть формул:

$$\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,}$$
$$\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,} \tag{5}$$
$$\mathbf{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha.}$$

Следующие шесть формул называют формулами приведения для косинуса:

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,}$$
$$\mathbf{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,\quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,} \tag{6}$$
$$\mathbf{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha.}$$

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α.

Задача 2 Вычислить $\sin 930^\circ$.

▶ Используя первую из формул (3), получаем

$$\sin 930^\circ = \sin(3\cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим $\sin(-150°) = -\sin 150°$. По формуле (4) находим

$$-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ $\sin 930° = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 3 Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

▶ $\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислению тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\text{tg}(\alpha + 2\pi k) = \text{tg}\,\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Используя это равенство и формулы (4), получаем

$$\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \text{tg}(\alpha - \pi) =$$
$$= -\text{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha.$$

Следовательно, справедлива формула

$$\textbf{tg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{k}) = \textbf{tg}\,\alpha,\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}. \quad (7)$$

Аналогично доказывается формула

$$\textbf{ctg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{k}) = \textbf{ctg}\,\alpha,\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}. \quad (8)$$

Следующие четыре формулы называют формулами приведения для тангенса и котангенса:

$$\textbf{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\textbf{ctg}\,\alpha, \qquad \textbf{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \textbf{ctg}\,\alpha,$$
$$\textbf{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\textbf{tg}\,\alpha, \qquad \textbf{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \textbf{tg}\,\alpha. \quad (9)$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4 Вычислить: 1) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{3}$; 2) $\text{tg}\,\frac{13\pi}{4}$.

▶ 1) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{3} = \text{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\text{tg}\,\frac{13\pi}{4} = \text{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$. ◁

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая формула (4). Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «–», так как если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

Упражнения

524 Найти острый угол α, при котором выполняется равенство:

1) $\cos 75° = \cos(90° - \alpha)$; 2) $\sin 150° = \sin(90° + \alpha)$;
3) $\sin 150° = \sin(180° - \alpha)$; 4) $\cos 310° = \cos(270° + \alpha)$;
5) $\sin\frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
7) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

Используя формулы приведения, вычислить **(525—526)**.

525 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$; 4) $\cos 120°$;
5) $\cos 225°$; 6) $\sin 210°$; 7) $\operatorname{ctg} 240°$; 8) $\sin 315°$.

526 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\text{tg}\,(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\,(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin\,(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\text{ctg}\,(\pi-\alpha)}{\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\text{ctg}\,(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\,(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\text{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

529 Вычислить:

1) $\cos 750°$; 2) $\sin 1140°$; 3) $\text{tg}\,405°$; 4) $\cos 840°$;

5) $\sin\dfrac{47\pi}{6}$; 6) $\text{tg}\,\dfrac{25\pi}{4}$; 7) $\text{ctg}\,\dfrac{27\pi}{4}$; 8) $\cos\dfrac{21\pi}{4}$.

530 Найти значение выражения:

1) $\cos 630° - \sin 1470° - \text{ctg}\,1125°$;

2) $\text{tg}\,1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

3) $3\cos 3660° + \sin(-1560°) + \cos(-450°)$;

4) $\cos 4455° - \cos(-945°) + \text{tg}\,1035° - \text{ctg}\,(-1500°)$.

531 Вычислить:

1) $\cos\dfrac{23\pi}{4}-\sin\dfrac{15\pi}{4}-\text{ctg}\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\dfrac{25\pi}{3}-\cos\left(-\dfrac{17\pi}{2}\right)-\text{tg}\,\dfrac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi)-2\cos\dfrac{31\pi}{3}-\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi)+2\sin\left(-\dfrac{49\pi}{6}\right)-\text{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (532—533).

532 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$;

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$;

3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\text{tg}\,(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\text{tg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=-\sin\alpha$.

533 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

534 Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

535 Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1$;

3) $\cos(x-\pi)=0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

536 Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.



§ 32 Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Задача 1 Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

▶ Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ◁

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

● Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2} = x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = y$. Тогда $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, и поэтому $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ○

Наряду с формулой (1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 2 Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▶ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° =$
$= 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° =$
$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

Задача 3 Преобразовать в произведение $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

▶ $2\sin\alpha + \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◁

Задача 4* Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

▶ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. ◁

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105° + \cos 75°$; 2) $\sin 105° - \sin 75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105° + \sin 165°$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

543 Записать в виде произведения:

1) $\cos 22° + \cos 24° + \cos 26° + \cos 28°$;

2) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}$.

544 Доказать тождество $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267° + \operatorname{tg} 93°$; 2) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$.

545 Разложить на множители:

1) $1 - \cos \alpha + \sin \alpha$; 2) $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$; 4) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$.

Упражнения к главе V

546 Найти:

1) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

547 Упростить выражение:

1) $2 \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2$;

2) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$.

Вычислить (548—549).

548 1) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos \frac{21\pi}{4}$.

549 1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$;

3) $3 \cos 3660° + \sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°) + \operatorname{tg} 1035°$.

Упростить выражение (550—551).

550 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$.

551 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

552 Доказать тождество:

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Вычислить (553—554).

553 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha+2\cos(\pi-3\alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha=\frac{5\pi}{36}$.

554 1) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos 75^\circ-\cos 15^\circ)}{1-2\sin^2 15^\circ}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

555 Доказать тождество:

1) $\dfrac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\dfrac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

556 Показать, что:

1) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$; 2) $\cos 12^\circ-\cos 48^\circ=\sin 18^\circ$.

Проверь себя!

1 **Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.**

2 **Найти значение выражения:**

1) $\cos 135^\circ$; 2) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 4) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$.

3 **Доказать тождество:**

1) $3\cos 2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2\cos 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}=\sin\alpha$.

4 **Упростить выражение:**

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$;

2) $\cos^2(\pi-\alpha)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$.

557 Упростить выражение $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$.

Доказать тождество (**558—559**).

558 1) $\frac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=-\sqrt{3}\,\text{ctg}\,2\alpha;$

2) $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{\text{tg}\,2\alpha}{\sqrt{3}}.$

559 1) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\text{ctg}\,\alpha;$ 2) $\frac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$

560 Вычислить $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

561 Вычислить значение выражения
$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

562 Вычислить значение выражения
$\frac{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}$, если $\text{ctg}\,\alpha=\frac{1}{3}$.

Доказать тождество (**563—564**).

563 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta);$
2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha.$

564 $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\text{tg}\,3\alpha.$

565 Найти значение выражения $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\text{tg}\,\alpha=2$.

Доказать тождество (**566—567**).

566 $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}.$

567 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha);$

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17).$

VI
глава

Тригонометрические уравнения

Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенным, что этого можно достичь.

А. Фуше

Уравнение $\cos x = a$



Из определения косинуса следует, что $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 68). Так как $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P\ (1;\ 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P\ (1;\ 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, все

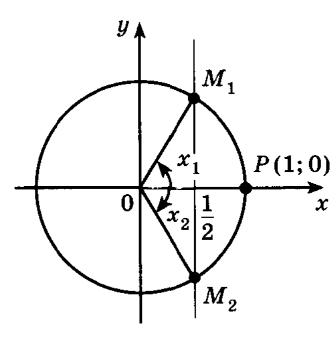


Рис. 68

корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Вместо этих двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.\ \triangleleft$$

Задача 2 Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 69). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, а потому угол $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

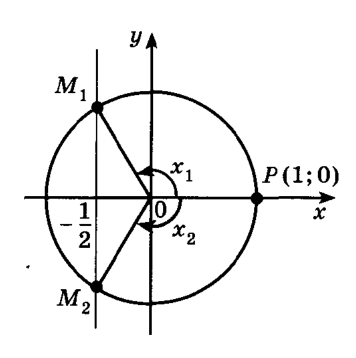


Рис. 69

Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $\triangleleft$

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; число $\frac{2\pi}{3}$ — называют арккосинусом числа $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Этот корень называют *арккосинусом числа a* и обозначают $\arccos a$ (рис. 70).

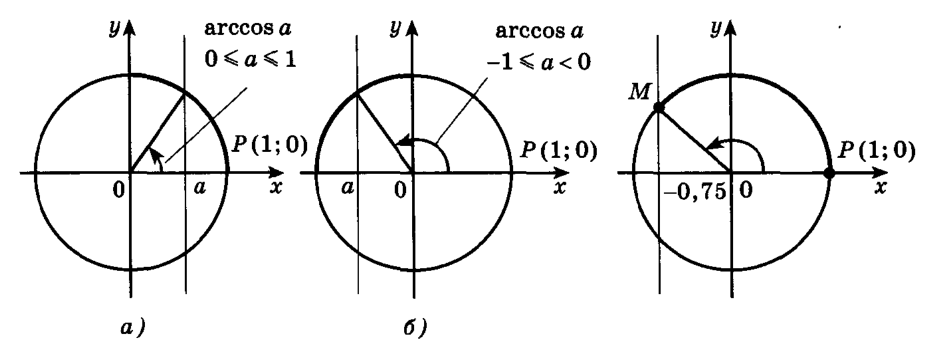
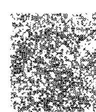


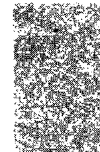
Рис. 70 *Рис. 71*



Арккосинусом числа $a \in [-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha \in [0;\ \pi]$, косинус которого равен a:

$$\boldsymbol{\arccos a = \alpha,\ \text{если}\ \cos\alpha = a\ \text{и}\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.} \qquad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.



Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, можно находить по формуле

$$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.} \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\cos x = -0{,}75$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \pm\arccos(-0{,}75) + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}.\ ◁$$

Значение arccos (−0,75) можно приближенно найти по рисунку 71, измеряя угол *POM* транспортиром, или с помощью микрокалькулятора. Например, на МК-51 по программе

[РЕЖ] 0,75 [/—/] [F] [$\cos^{-1}$] <u>2,4188584</u>.

Итак, $\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42$.

Задача 4* Решить уравнение $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

▶ 1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$,

$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\mathbf{arccos}\,(-a) = \pi - \mathbf{arccos}\,a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел. Например:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\mathbf{\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z,} \qquad (4)$$

$$\mathbf{\cos x = 1,\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in Z,} \qquad (5)$$

$$\mathbf{\cos x = -1,\ \ x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z.} \qquad (6)$$

Задача 5 Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

▶ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Упражнения

Вычислить **(568—569).**

568 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

569 1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$; 2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

570 Сравнить числа:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (571—573).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0{,}3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$;

4) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

574 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;

2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

575 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$;

4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$; 5) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

576 Решить уравнение:

1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4\cos^2 x = 3$;

3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;

5) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$;

6) $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$;

7) $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$;

8) $(1 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$.

577 Найти все корни уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

578 Найти все корни уравнения $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{\pi}{4}$.

579 Решить уравнение:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

580 Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$. Вычислить:

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

581 Доказать, что $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Вычислить:

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

582 Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

583 Упростить выражение $\cos(2\arccos a)$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

584 Доказать, что если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$.

585 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\cos x = 0{,}35$; 2) $\cos x = -0{,}27$.



§ 34 Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 72). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получа-

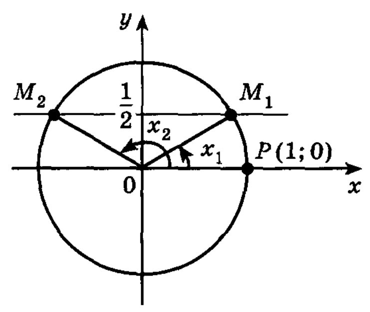


Рис. 72

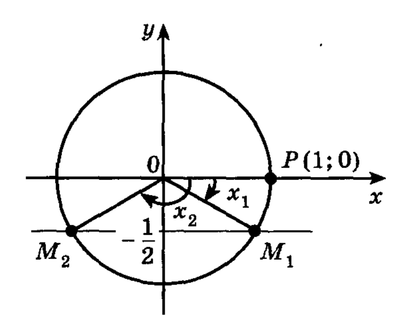


Рис. 73

ется из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечетное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 73), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$.

Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (2) получаем $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то по формуле (2) находим $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Ответ $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$ ◁

Итак, каждое из уравнений $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=-\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ и $x_1=-\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; число $-\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $-\frac{1}{2}$ и пишут $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

Вообще, уравнение $\sin x = a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, на отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеет только один корень. Если $a\geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; если $a<0$, то корень заключен в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют *арксинусом числа а* и обозначают $\arcsin a$ (рис. 74).

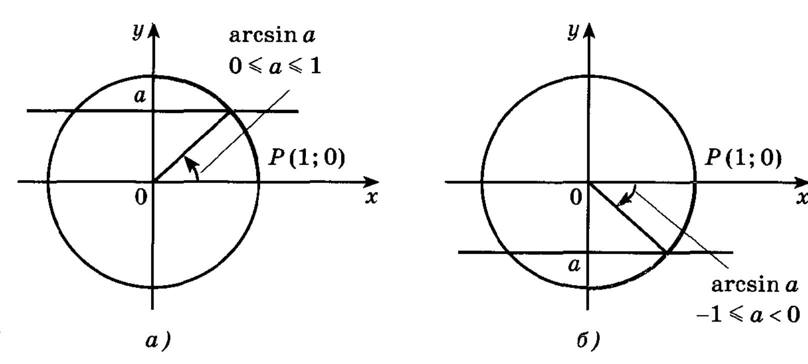
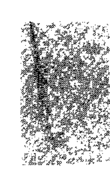


Рис. 74 *а)* *б)*



Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin\alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z. \quad (4)$$

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{3}$.

▶ По формуле (4) находим $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

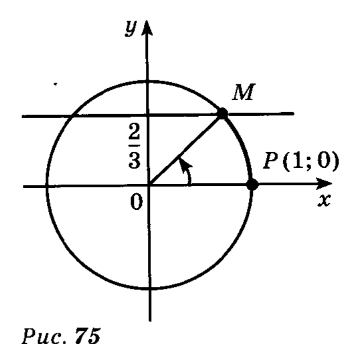


Рис. 75

Значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно приближенно найти из рисунка 75, измеряя угол *POM* транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе МК-51 по программе

[РЕЖ] 2 [÷] 3 [=] [F] [$\sin^{-1}$] 7,2972769 · 10^{-1}.

Итак, $\arcsin\frac{2}{3} \approx 0{,}73$.

Задача 4* Решить уравнение $(3\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$.

▶ 1) $3\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{3}$,

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $2\sin 2x + 1 = 0$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\mathbf{arcsin}\,(-a) = -\mathbf{arcsin}\, a. \qquad (5)$$

Эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел. Например:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (6)$$

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (7)$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (8)$$

Задача 5 Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

▶ По формуле (7) имеем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, откуда

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Упражнения

Вычислить **(586—587).**

586 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

587 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

588 Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение **(589—592)**.

589 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

590 1) $\sin x=\frac{2}{7}$; 2) $\sin x=-\frac{1}{4}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

591 1) $\sin 3x=1$; 2) $\sin 2x=-1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$;

4) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

592 1) $\sin 4x\cos 2x=\cos 4x\sin 2x$;

2) $\cos 2x\sin 3x=\sin 2x\cos 3x$.

593 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$;

3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$; 4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$;

5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение **(594—596)**.

594 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$;

3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

595 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;

2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

596 1) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$;

2) $(4\sin 3x-1)(2\sin x+3)=0$.

597 Найти все корни уравнения $\sin 2x=\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

598 Найти все корни уравнения $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_{\pi}(x-4\pi)<1$.

599 Доказать, что $\sin(\arcsin a)=a$ при $-1\leqslant a\leqslant 1$. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

600 Доказать, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

Вычислить **(601—603)**.

601 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

602 1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

603 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$.

604 Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$.

605 Доказать, что если $0\leqslant a\leqslant 1$, то $2\arcsin a=\arccos(1-2a^2)$.

606 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\sin x=0{,}65$; 2) $\sin x=-0{,}31$.



§ 35 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Из определения тангенса следует, что $\operatorname{tg} x$ может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a.

Задача 1 Решить уравнение $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

▶ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведем через точку P (рис. 76) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отре-

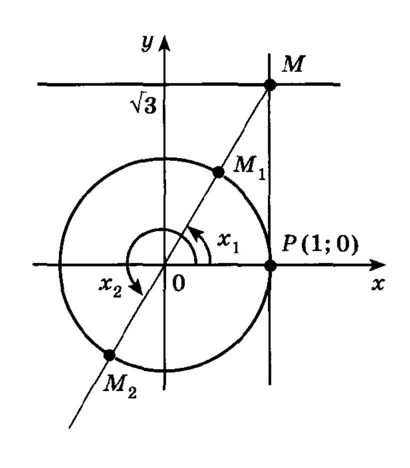


Рис. 76

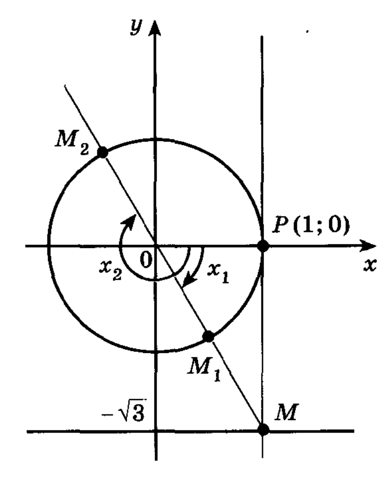


Рис. 77

зок $PM = \sqrt{3}$; через точки M и O проведем прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \text{tg}\, x_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P\,(1;\,0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

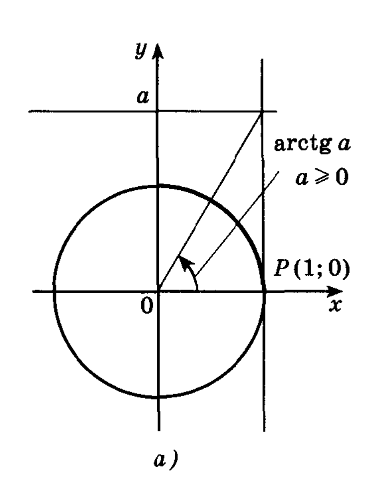
Точка M_2 получается поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$, где $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Итак, корни уравнения $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi\,(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Эти формулы объединяются в одну:

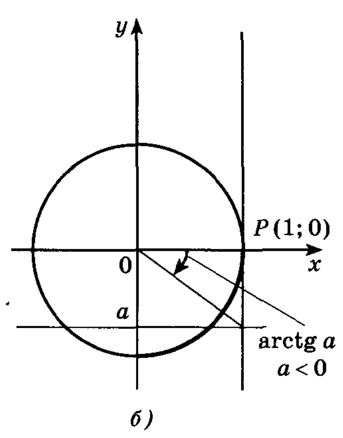
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Решить уравнение $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$.

▶ Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 77, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим $\angle POM = \frac{\pi}{3}$,



а)



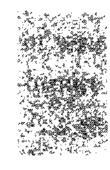
б)

Рис. 78

т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P\,(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом точки $P\,(1;\,0)$ на углы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi\,(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\ \triangleleft$$

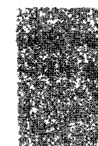
Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $\sqrt{3}$ и записывают $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ имеет на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют *арктангенсом числа a* и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 78).



Арктангенсом числа $a \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\mathbf{arctg}\ \boldsymbol{a} = \alpha,\ \textbf{если}\ \mathbf{tg}\ \alpha = \boldsymbol{a}\ \textbf{и}\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.



Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, выражаются формулой

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.} \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

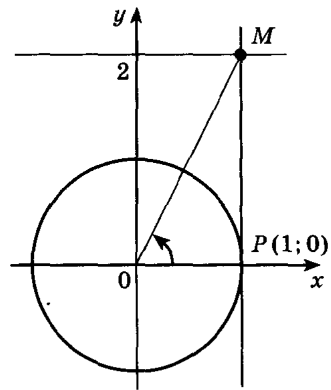


Рис. 79

▶ По формуле (2) находим

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \quad ◁$$

Значение arctg 2 можно приближенно найти из рисунка 79, измеряя угол *POM* транспортиром.

Приближенные значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора.

Например, значение arctg 2 можно вычислить на МК-51 по программе

[РЕЖ] 2 [F] [tg^{-1}] 1,1071487.

Итак, $\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11$.

Задача 4* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 4 = 0$, $\operatorname{tg} x = -4$, $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x первая скобка левой части исходного уравнения обращается в нуль, а вторая не теряет смысла, так как из равенства $\operatorname{tg} x = -4$ следует, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом вторая скобка

левой части уравнения равна нулю, а первая скобка не теряет смысла.

Ответ $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n,\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Можно доказать, что для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедлива формула

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел. Например:

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Упражнения

Вычислить **(607—608)**.

607 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

608 1) $6 \operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

609 Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$.

Решить уравнение **(610—612)**.

610 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$; 5) $\operatorname{tg} x = 4$; 6) $\operatorname{tg} x = -5$.

611 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$.

612 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$; 4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$; 6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

613 Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

614 Решить уравнение:

1) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

615 Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ при любом a. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2{,}1)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 7)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 6\right)$.

616 Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0{,}5)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

617 Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

618 Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

619 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 9$; 2) $\operatorname{tg} x = -7{,}8$.



§ 36 Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих параграфах были выведены формулы корней простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. К этим уравнениям сводятся другие тригонометрические уравнения. Для решения большинства таких уравнений требуется применение различных формул

и преобразований тригонометрических выражений. Рассмотрим некоторые примеры решения тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Задача 1 Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

▶ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Обозначим $\sin x = y$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x = 1$ и $\sin x = -2$.

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$.

▶ Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0, \text{ или}$$
$$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0.$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

▶ Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0,$$
$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \ \cos x = y,$$
$$2y^2 - y - 1 = 0, \ y_1 = 1, \ y_2 = -\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$$= \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = 2\pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Задача 4 Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0.$

▶ Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = y,\ y^2 + y - 2 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = -2.$$

1) $\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

2) $\operatorname{tg} x = -2,\ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Так как для найденных корней $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Задача 5 Решить уравнение $3 \cos^2 6x + 8 \sin 3x \cos 3x - 4 = 0.$

▶ Используя формулы

$$\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1,\ \sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x,$$

преобразуем уравнение:

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4 \sin 6x - 4 = 0,$$

$$3 \sin^2 6x - 4 \sin 6x + 1 = 0.$$

Обозначим $\sin 6x = y$, получим уравнение

$$3y^2 - 4y + 1 = 0, \text{ откуда } y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{3}.$$

1) $\sin 6x = 1,\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z};$

2) $\sin 6x = \frac{1}{3},\ 6x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$

$$x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

2. Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$.

Задача 6 Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

▶ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

При решении этой задачи обе части уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ были поделены на $\cos x$. Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Задача 7 Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Уравнение, рассмотренное в задаче 7, является уравнением вида

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом. Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Введем вспомогательный аргумент φ, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Такое число φ существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением

Задача 8 Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

▶ Здесь $a = 4$, $b = 3$, $\sqrt{a^2+b^2} = 5$.

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1, \ \sin (x + \varphi) = 1,$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Задача 9 Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

▶ Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$. Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем $\sin x\,(2 \cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2 \cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 10 Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

▶ Используя формулу приведения $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, запишем уравнение в виде $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

Используя формулу суммы косинусов, получаем

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 11 Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3 \cos 2x$.

▶ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2 \sin 5x \cos 2x = 3 \cos 2x,$$
$$2 \sin 5x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0$.

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 12 Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

▶ Так как $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x +$ $+ \sin 3x \sin x$, уравнение примет вид $\sin x \sin 3x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что числа πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как если $n = 3k$, то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Часто бывает трудно усмотреть, что две серии корней, полученных при решении тригонометрического уравнения, имеют общую часть. В этих случаях ответ можно оставлять в виде двух серий. Например, ответ к задаче 12 можно было записать и так:

$$x = \pi n, \ x = \frac{\pi n}{3}, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 13* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 1)\left(2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первая скобка левой части уравнения равна нулю, а вторая не теряет смысла.

2) $2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0$, $\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} - 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x вторая скобка левой части исходного уравнения равна нулю, а первая скобка не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 14* Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

▶ Выразим $\sin^2 x$ через $\cos 2x$. Так как $\cos 2x =$ $= \cos^2 x - \sin^2 x$, то $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Поэтому исходное уравнение можно записать так:

$$3\ (1 - \cos 2x) + 2\ (1 - \cos^2 2x) = 5,$$

или $2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x = 0$, откуда

$$\cos 2x\ (2 \cos 2x + 3) = 0.$$

1) $\cos 2x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 15* Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

▶ Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную систему $\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \cos x \sin y - \sin x \cos y = 1, \end{cases}$

откуда $\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(y - x) = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$ $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Решая последнюю систему, находим

$$x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right),$$

$$y = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right).$$

Ответ $\left(\pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right);\ \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right)\right)$, $n,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Отметим, что в равенствах $\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$

буквы n и k могут принимать различные целые значения независимо друг от друга. Если в обоих равенствах написать одну букву n, то будут потеряны решения. Например:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi, \end{cases}$$

т. е. $x = -\frac{\pi}{4} - \pi,\ y = \frac{\pi}{4} + \pi$.

Упражнения

Решить уравнение (620—644).

620 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 4) $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

621 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

622 1) $\mathrm{tg}^2\, x = 2$; 2) $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, x$;

3) $\mathrm{tg}^2\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$; 4) $\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x + 1 = 0$.

623 1) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$; 2) $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4) $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x \cos x = 0$.

624 1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos x = \sin x$;

3) $\sin x = 2\cos x$; 4) $2\sin x + \cos x = 0$.

625 1) $\sin x - \cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = 1$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 4) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

626 1) $\cos x = \cos 3x$; 2) $\sin 5x = \sin x$;

3) $\sin 2x = \cos 3x$; 4) $\sin x + \cos 3x = 0$.

627 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$; 2) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;

3) $\cos x + \cos 3x = 4\cos 2x$; 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

628 1) $(\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3})\left(2\sin\frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x) = 0$;

3) $\left(2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2\,\mathrm{tg}\, x + 1) = 0$;

4) $\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)(\mathrm{tg}\, x - 3) = 0$.

629 1) $\sqrt{3}\sin x \cos x = \sin^2 x$; 2) $2\sin x \cos x = \cos x$;

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$.

630 1) $2\sin^2 x = 1 + \frac{1}{3}\sin 4x$; 2) $2\cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;

3) $2\cos^2 2x + 3\cos^2 x = 2$; 4) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

631 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

2) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;

3) $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;

4) $\sin 2x + 5(\cos x + \sin x + 1) = 0$.

632 1) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2$.

633 1) $8\sin x\cos x\cos 2x=1$; 2) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$.

634 1) $2\cos^2 2x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0$;

2) $1-\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^3 2x=1$; 4) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1+4\sin x$.

635 1) $\cos x\cos 2x=\sin x\sin 2x$; 2) $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x$;

3) $\sin 3x=\sin 2x\cos x$; 4) $\cos 5x\cos x=\cos 4x$.

636 1) $4\sin^2 x-5\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$;

2) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $1-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$; 4) $1+\sin^2 x=2\sin x\cos x$.

637 1) $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$;

2) $6\cos 2x\sin x+7\sin 2x=0$.

638 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

2) $\sin x(1-\cos x)^2+\cos x(1-\sin x)^2=2$.

639 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$;

2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

640 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$; 2) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}$.

641 1) $\frac{\cos 2x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos 2x}=1$; 2) $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}$.

642 1) $\sin x\sin 5x=1$; 2) $\sin x\cos 4x=-1$.

643 1) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$; 2) $\sqrt{\cos x+\cos 3x}=-\sqrt{2}\cos x$.

644 1) $4|\cos x|-3=4\sin^2 x$; 2) $|\operatorname{tg} x|+1=\frac{1}{\cos^2 x}$.

645 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1.\end{cases}$

646 Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x+2(a-3)\cos x+3a-4=0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

647 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=a$$

не имеет корней.



§ 37* Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Задача 1 Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

▶ По определению $\cos x$ — это абсцисса точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$.

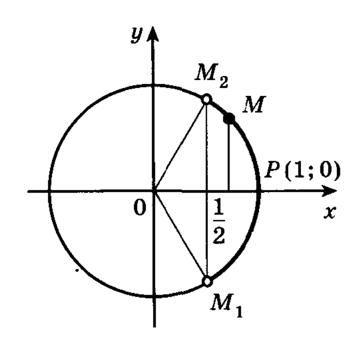


Рис. 80

Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 80).

Точка M_1 получается поворотом точки P (1; 0) на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства — множество интервалов

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, не большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 81). Поэто-

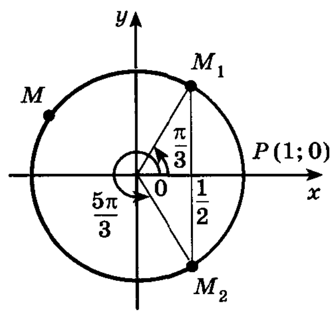


Рис. 81

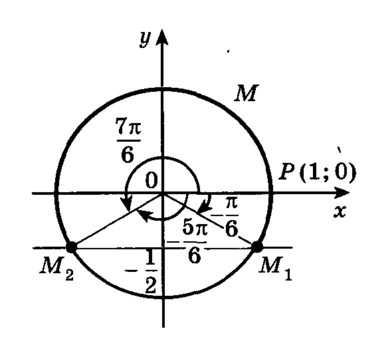


Рис. 82

му решениями неравенства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат промежутку $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 3 Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 82). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 82). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы

$$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 4 Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4}-1\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ Обозначим $\frac{x}{4}-1=y$. Решая неравенство $\cos y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 83), находим

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

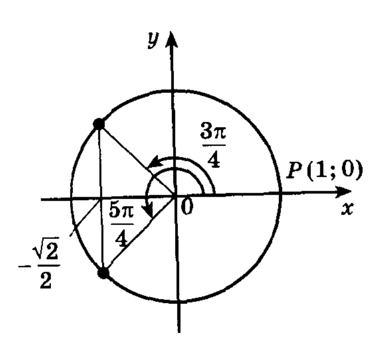


Рис. 83

Заменяя $y=\frac{x}{4}-1$, получаем

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4}-1 \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

откуда

$$1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

$$4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Упражнения

Решить неравенство (648—654).

648 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

649 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

650 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

651 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$;

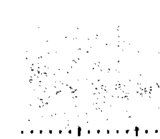
3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

652 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

653 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

654 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.



Упражнения к главе VI

655 Вычислить:

1) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \arcsin 1$;

3) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arccos (-1) - \arcsin (-1)$;

5) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 6) $4 \operatorname{arctg} (-1) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решить уравнение (**656—665**).

656 1) $\cos (4 - 2x) = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos (6 + 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 4) $2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) - \sqrt{3} = 0$.

657 1) $2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 2) $1 - \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

3) $3 + 4 \sin (2x + 1) = 0$; 4) $5 \sin (2x - 1) - 2 = 0$.

658 1) $(1 + \sqrt{2} \cos x)(1 - 4 \sin x \cos x) = 0$;

2) $(1 - \sqrt{2} \cos x)(1 + 2 \sin 2x \cos 2x) = 0$.

659 1) $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$; 4) $1 - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$.

660 1) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$; 2) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;

3) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$; 4) $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$.

661 1) $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; 2) $8 \cos^2 x - 12 \sin x + 7 = 0$.

662 1) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$; 2) $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

663 1) $2 \sin 2x = 3 \cos 2x$; 2) $4 \sin 3x + 5 \cos 3x = 0$.

664 1) $5 \sin x + \cos x = 5$; 2) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

665 1) $\sin 3x = \sin 5x$; 2) $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$;

3) $\cos x = \cos 3x$; 4) $\sin x \sin 5x - \sin^2 5x = 0$.

Проверь себя!

1 **Найти значение выражения:**

1) $\arccos 1 + \arcsin 0$; **2)** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 **Решить уравнение:**

1) $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = 1$;

2) $2\cos^2 x + 5\cos x = 3$; **3)** $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 0$;

4) $\sin 3x - \sin x = 0$; **5)** $2\sin x + \sin 2x = 0$.

Вычислить **(666—667)**.

666 1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

667 1) $\sin(4\arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos(6\arcsin 1)$; 4) $\operatorname{tg}\left(4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение **(668—675)**.

668 1) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; 2) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$.

669 1) $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

2) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

670 1) $1 - 2\sin x = \sin 2x + 2\cos x$;

2) $1 - 3\cos x = \sin 2x + 3\sin x$.

671 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;

2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$.

672 1) $\cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x = \frac{1}{4}$;

2) $\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$.

673 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; 2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;

3) $\sin 4x = 6\cos^2 2x - 4$; 4) $2\cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

674 1) $\sin^2 x - \cos x\cos 3x = \frac{1}{4}$; 2) $\sin 3x = 3\sin x$;

3) $3\cos 2x - 7\sin x = 4$; 4) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

5) $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$.

675 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

2) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

Вычислить (676—677).

676 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

677 1) $\operatorname{tg}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2\right)$.

Решить уравнение (678—684).

678 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x}=0$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x}=0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x}=0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x}=0$.

679 1) $\cos x\sin 5x=-1$; 2) $\sin x\cos 3x=-1$.

680 1) $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$; 2) $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.

681 1) $\sin 2x+\cos 2x=2\operatorname{tg}x+1$; 2) $\sin 2x-\cos 2x=\operatorname{tg}x$.

682 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$.

683 $\sqrt{-4\cos x\cos^2 x}=\sqrt{7\sin 2x}$.

684 $|\cos x|-\cos 3x=\sin 2x$.

685 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sin y\cos y=\frac{1}{2},\\ \sin 2x+\sin 2y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ \cos x-\cos y=\sqrt{3}.\end{cases}$

686 1) $\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3},\\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1}{3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

687 При каких значениях a уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ имеет корни? Найти эти корни.

688 Найти все значения a, при которых уравнение $\sin^{10} x+\cos^{10} x=a$ имеет корни.

689 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin 2x-2a\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1-6a^2=0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

690 Решить неравенство:

1) $2\cos^2 x+\sin x-1<0$; 2) $2\sin^2 x-5\cos x+1>0$.

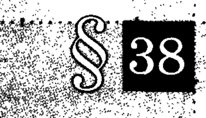


VII
глава

Тригонометрические функции

Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

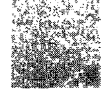
У. Томсон



§ 38 Область определения и множество значений тригонометрических функций

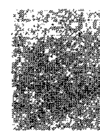
Вы знаете, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x рад. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x.$$



Таким образом, областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Чтобы найти множество значений функции $y = \sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений y есть такие значения x, при которых $\sin x = y$. Известно, что уравнение $\sin x = a$ имеет корни, если $|a| \leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.



Следовательно, множеством значений функции $y = \sin x$ является отрезок $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
Аналогично множеством значений функции $y = \cos x$ также является отрезок $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Задача 1 Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

▶ Найдем значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т. е. значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x + \cos x = 0$, находим $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 2 Найти множество значений функции

$$y = 3 + \sin x \cos x.$$

▶ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3 + \sin x \cos x = a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3 + \frac{1}{2}\sin 2x = a$, откуда $\sin 2x = 2a - 6$. Это уравнение имеет корни, если $|2a - 6| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant 2a - 6 \leqslant 1$, откуда $5 \leqslant 2a \leqslant 7$, $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$. Следовательно, множеством значений данной функции является промежуток $2{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5$. ◁

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется формулой $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Эта функция определена при тех значениях x, для которых $\cos x \neq 0$.

Известно, что $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.



Следовательно, областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a, то множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ называются *тригонометрическими функциями*.

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

▶ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 4* Найти множество значений функции

$$y = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

▶ Выясним, при каких значениях a уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = a$ имеет корни. Поделим уравнение на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = \frac{a}{5}.$$

Так как $0 < \frac{3}{5} < 1$, то можно найти такой угол α первой четверти, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, что $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (этот угол $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$). Тогда $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, откуда $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Уравнение примет вид $\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{a}{5}$, т. е. $\sin (x + \alpha) = \frac{a}{5}$. Это уравнение имеет корни, если $-1 \leqslant \frac{a}{5} \leqslant 1$, т. е. $-5 \leqslant a \leqslant 5$.

Ответ $-5 \leqslant y \leqslant 5$. ◁

Упражнения

691 Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \cos \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin \frac{2}{x}$; 5) $y = \sin \sqrt{x}$; 6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

692 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = 2 \sin x + 3$; 4) $y = 1 - 4 \cos 2x$;

5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$; 6) $y = \frac{1}{2} \sin x \cos x - 1$.

Найти область определения функции **(693—695)**.

693 1) $y = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y = \frac{2}{\sin x}$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg} 5x$.

694 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 3) $y = \lg \sin x$;

4) $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$; 5) $y = \sqrt{1 - 2 \sin x}$; 6) $y = \ln \cos x$.

695 1) $y = \frac{1}{2 \sin^2 x - \sin x}$; 2) $y = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$; 4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$.

696 Найти множество значений функции:

1) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x$; 2) $y = 1 - 8 \cos^2 x \sin^2 x$;

3) $y = \frac{1 + 8 \cos^2 x}{4}$; 4) $y = 10 - 9 \sin^2 3x$;

5) $y = 1 - 2 |\cos x|$; 6) $y = \sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

697 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

698 Найти множество значений функции $y = \sin x - 5 \cos x$.

699 Найти множество значений функции

$$y = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x.$$



§ 39 Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

Вы знаете, что для любого значения x верны равенства

$$\sin (-x) = -\sin x, \quad \cos (-x) = \cos x.$$

Следовательно, $y = \sin x$ — *нечетная* функция, а $y = \cos x$ — *четная* функция. Так как для любого значения x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ верно равенство $\operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{tg} x$, то $y = \operatorname{tg} x$ — *нечетная* функция.

Задача 1 Выяснить, является ли функция

$$y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$ четной или нечетной.

▶ Используя формулу приведения, запишем данную функцию так: $y = 2 + \sin^2 x$. Имеем $y(-x) = 2 + \sin^2(-x) = 2 + (-\sin x)^2 = 2 + \sin^2 x = y(x)$, т. е. данная функция является четной. ◁

Известно, что для любого значения x верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются *периодическими* с периодом 2π.

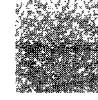
Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x + T$, $x - T$ и вообще числа $x + Tn$, $n \in \mathbf{Z}$, также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \mathbf{Z}$.



Покажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \cos x$.

● Пусть $T > 0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ..., и поэтому период не может быть меньше 2π. ○



Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции $y = \sin x$ также равен 2π.

Задача 2 Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

▶ Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то, для того чтобы убедиться в том, что она является периодической с периодом T, доста-

точно показать, что для любого x верно равенство $f(x+T)=f(x)$. Данная функция определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, и $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=$ $=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)$. ◁

Покажем, что функция $y=\operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π.

● Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq -\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то по формулам приведения получаем

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=-(-\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$. Следовательно, π — период функции $y=\operatorname{tg} x$. ○



Покажем, что π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$.

● Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$, откуда при $x=0$ получаем $\operatorname{tg} T=0$, $T=k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$. ○

Задача 3 Доказать, что $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

▶ Так как $\operatorname{tg}\frac{x+3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x-3\pi}{3}=$ $=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ◁

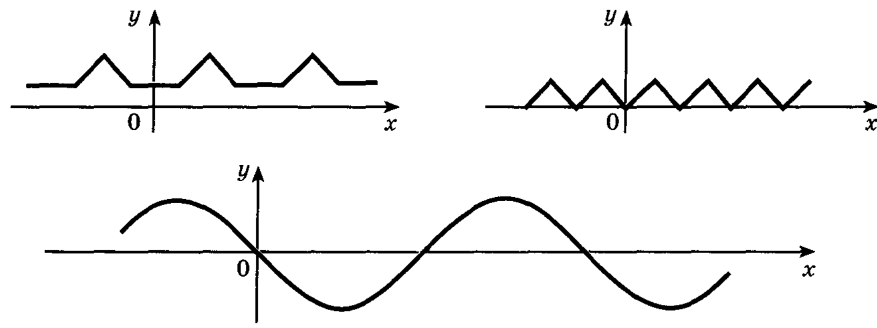


Рис. 84

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебания маятника, вращение планет, переменный ток и т. д.).

На рисунке 84 изображены графики некоторых периодических функций. Отметим, что на всех последовательных отрезках числовой прямой, длина которых равна периоду, график периодической функции имеет один и тот же вид.

Упражнения

Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной **(700—701)**.

700 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = 2 \sin 4x$; 3) $y = \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

4) $y = x \cos \frac{x}{2}$; 5) $y = x \sin x$; 6) $y = 2 \sin^2 x$.

701 1) $y = \sin x + x$; 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$;

3) $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi - x)$;

4) $y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 3$;

5) $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cos x$; 6) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$.

702 Доказать, что данная функция является периодической с периодом 2π, если:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3 \sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

703 Доказать, что данная функция является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin \frac{4x}{5}$, $T = \frac{5}{2}\pi$.

704 Определить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 - \cos 2x}$; 3) $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$;

4) $y = \frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$; 5) $y = 3^{\cos x}$; 6) $y = x\,|\sin x|\,\sin^3 x$.

Найти наименьший положительный период функции (705—706).

705 1) $y = \cos\frac{2}{5}x$; 2) $y = \sin\frac{3}{2}x$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y = |\sin x|$.

706 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

707 Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что:
1) $f(x) + f(-x)$ — четная функция;
2) $f(x) - f(-x)$ — нечетная функция.
Используя эти функции, представить $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций.

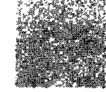


§ 40 Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

Напомним, что функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, график этой функции расположен *в полосе между прямыми* $y = -1$ и $y = 1$.

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, то *достаточно построить ее график на* каком-нибудь *промежутке длиной* 2π, например на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, график будет таким же.

Функция $y = \cos x$ является четной. Поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Для построения графика на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ достаточно построить его для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy.



Прежде чем перейти к построению графика, покажем, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

● В самом деле, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол от 0 до π абсцисса точки, т. е. $\cos x$, уменьшается от 1 до -1. Поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$, то $\cos x_1 > \cos x_2$ (рис. 85). Это и означает, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. ○

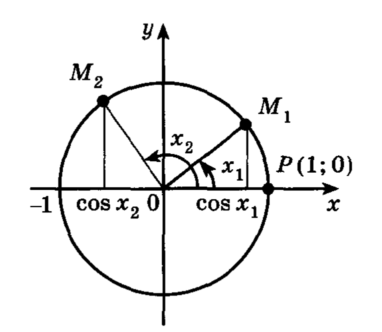


Рис. 85

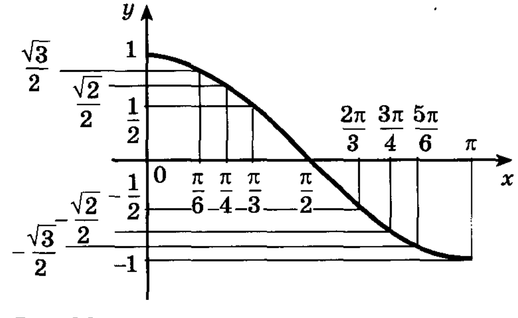


Рис. 86

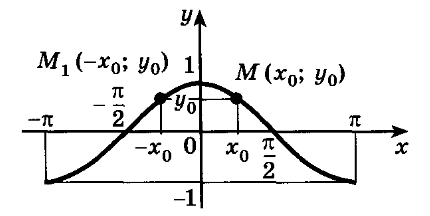


Рис. 87

Используя свойство убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом отрезке (рис. 86).

Пользуясь свойством четности функции $y = \cos x$, отразим построенный на отрезке $[0; \pi]$ график симметрично относительно оси Oy, получим график этой функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 87).

Так как $y = \cos x$ — периодическая функция с периодом 2π и ее график построен на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной, равной периоду, распространим его по всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т. д. вправо, на -2π, -4π и т. д. влево, т. е. вообще на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 88).

Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0; \pi]$.

Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0; \pi]$. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, так как она убывает на отрезке $[0; \pi]$ и является четной.

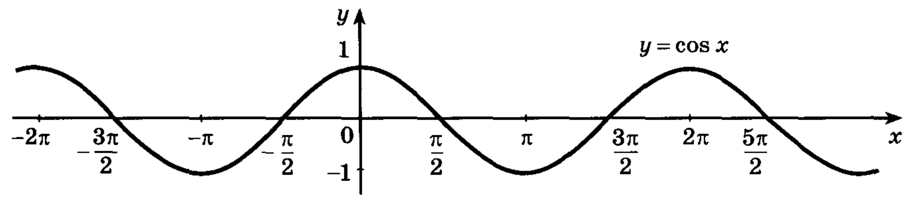


Рис. 88



Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1;\ 1]$.

3) Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π.

4) Функция $y = \cos x$ четная.

5) Функция $y = \cos x$ принимает:

— значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

6) Функция $y = \cos x$:

— возрастает на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$;

— убывает на отрезке $[0;\ \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▶ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 89). Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$.

На отрезке $[0;\ \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Из рисунка видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относитель-

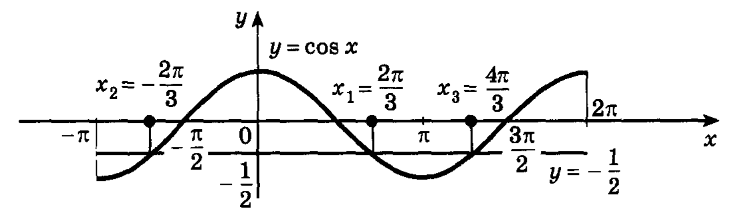


Рис. 89

но оси Oy, т. е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▶ Из рисунка 89 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения **(708—713)**.

708 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, –1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;

4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

713 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$;

3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

714 Выражая синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; 3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$;

4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$; 5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

715 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

716 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$:

1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3\cos x$.

718 Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

719 Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = 3 - 2\cos(x - 1)$.



§ 41 Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 2π. Ее график можно построить таким же способом, как и график функции $y = \cos x$, начиная с построения, например, на отрезке $[0; \pi]$. Однако проще воспользоваться формулой

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула показывает, что график функции $y = \sin x$ можно получить сдвигом графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 90).

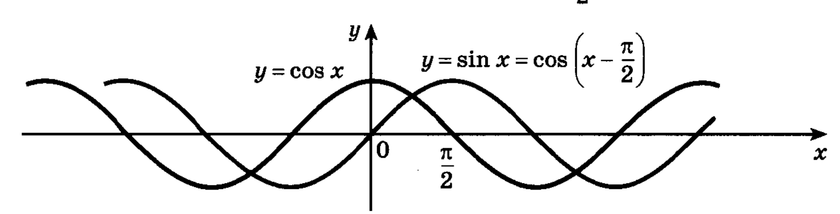


Рис. 90

График функции $y = \sin x$ изображен на рисунке 91. Кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, называется *синусоидой*.

Так как график функции $y = \sin x$ получается сдвигом графика функции $y = \cos x$, то свойства функции $y = \sin x$ можно получить из свойств функции $y = \cos x$.

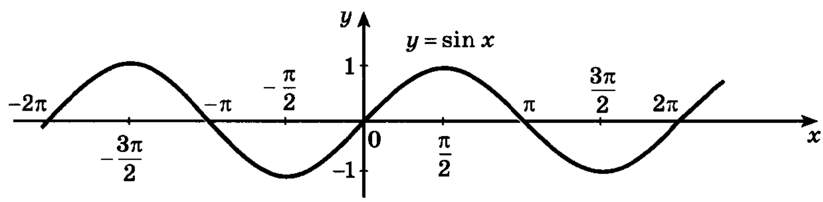


Рис. 91

Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Функция $y = \sin x$ периодическая, $T = 2\pi$.

4) Функция $y = \sin x$ нечетная.

5) Функция $y = \sin x$ принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшее значение, равное −1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервале $(0; \pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

6) Функция $y = \sin x$:

— возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$;

— убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▶ Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 92). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых являются кор-

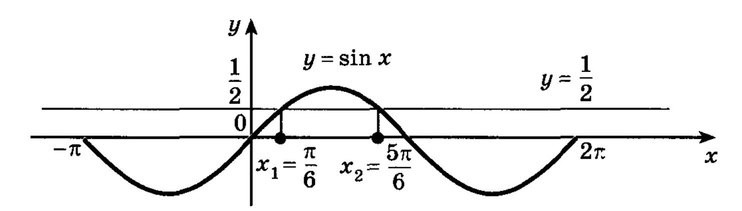


Рис. 92

нями уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Второй корень $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▶ Из рисунка 92 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения **(720—725)**.

720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, -1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:
1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:
1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

723 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:
1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;
3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

724 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

725 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

726 Выражая косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

727 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

728 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

729 Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;

3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

730 Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

731 Построить график функции:

1) $y = \sin |x|$; 2) $y = |\sin x|$.

732 Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой

$$I = A \sin (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§ 42 Свойства функции $y = \text{tg}\, x$ и ее график

Напомним, что функция $y = \text{tg}\, x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, является нечетной и периодической с периодом π. Поэтому достаточно построить ее график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \text{tg}\, x$ на всей области определения.

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y = \text{tg}\, x$ возрастает.

● * Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\text{tg}\, x_1 < \text{tg}\, x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ○

Используя свойство возрастания функции $y = \text{tg}\, x$ на промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом промежутке (рис. 93).

Пользуясь свойством нечетности функции $y = \text{tg}\, x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ гра-

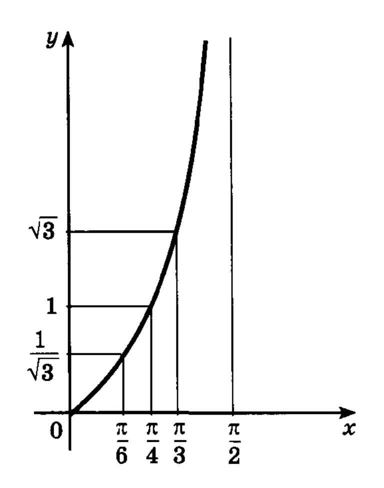


Рис. 93

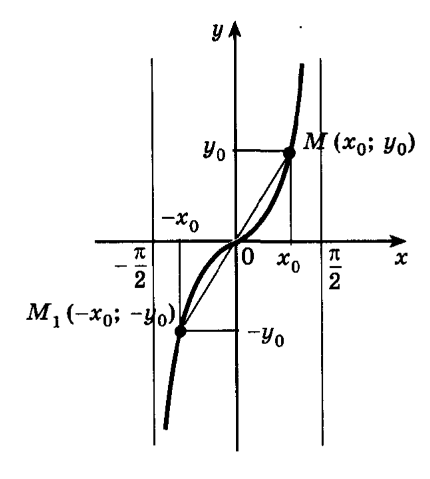


Рис. 94

фик симметрично относительно начала координат, получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94).

Напомним, что при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x, больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = -\frac{\pi}{2}$.

Перейдем к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из ее графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 95).

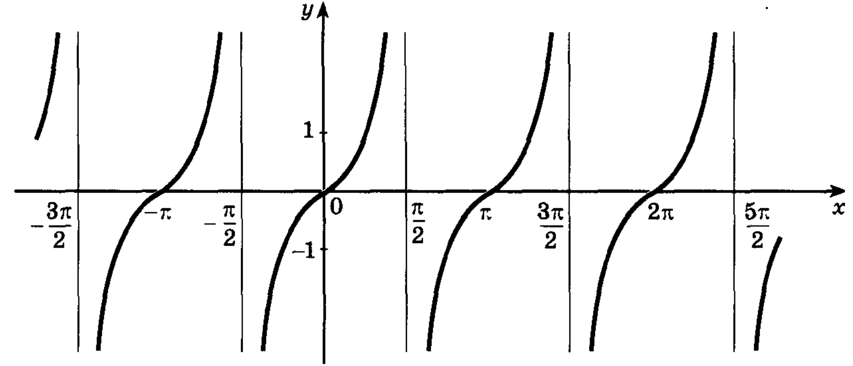


Рис. 95

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечетной.

Перечислим основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π.
4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.
5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
   — значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
   — положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
   — отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
6) Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 96, *а*). Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

▶ Из рисунка 96, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$;

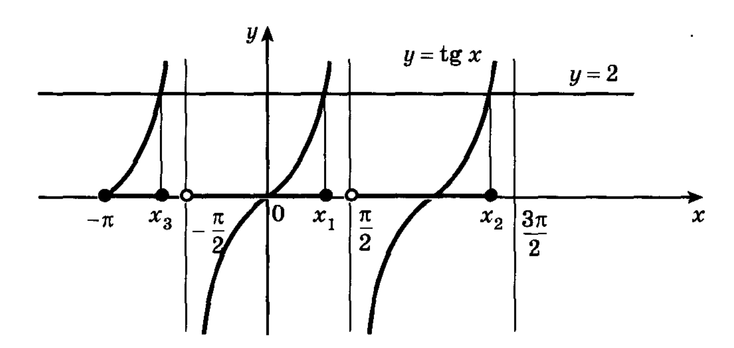
$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 96, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие, как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задается формулой $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — гармониками (от греческого слова harmonikos — соразмерный). График функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением ее вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox.



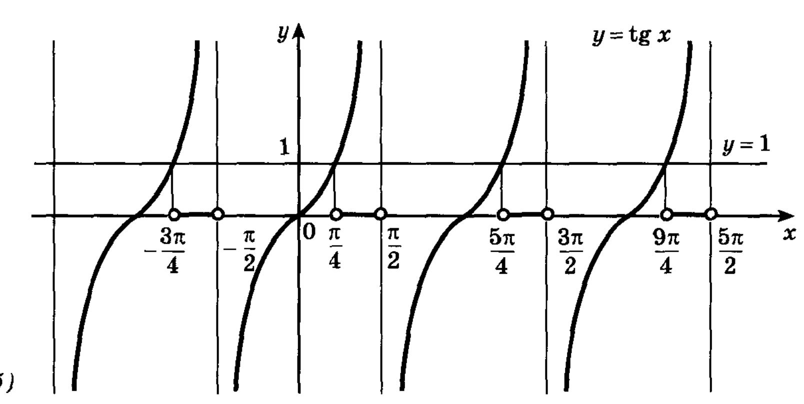


Рис. 96

Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

733 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
1) значение, равное 0; 2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

734 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:
1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

735 Используя свойство возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$, сравнить числа:
1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

736 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

737 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi, 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

738 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

739 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

740 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

741 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

742 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

743 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

744 Построить график функции и выяснить ее свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции **(746—748)**.

746 1) $y = \operatorname{tg} |x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

§ 43* Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$.

По определению арксинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arcsin x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ задана функция

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Покажем, что функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

● Рассмотрим уравнение $\sin x = y$, где y — заданное число из отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$, а x — неизвестное. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ это уравнение по определению арксинуса числа имеет единственный корень $x = \arcsin y$.

В этой формуле меняем местами x и y, получаем $y = \arcsin x$. ○

Таким образом, свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 97, 98).

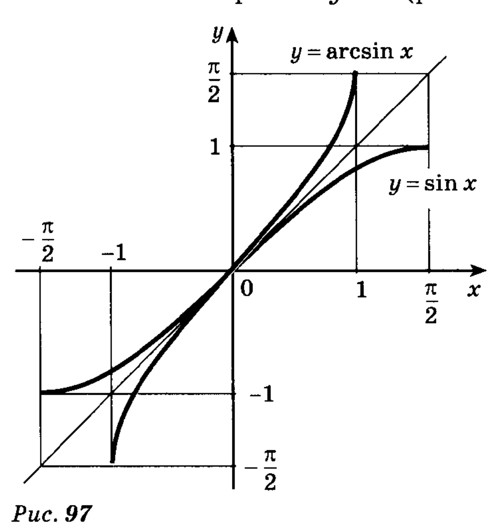


Рис. 97

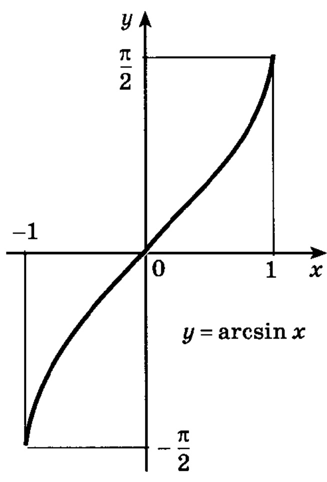
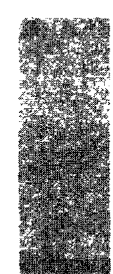


Рис. 98



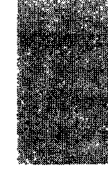
Перечислим основные свойства функции $y = \arcsin x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Функция $y = \arcsin x$ возрастает.
4) Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

2. Функция $y = \arccos x$.

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ определена функция $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, относительно прямой $y = x$ (рис. 99, 100).



Перечислим основные свойства функции $y = \arccos x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $[0; \pi]$.
3) Функция $y = \arccos x$ убывает.

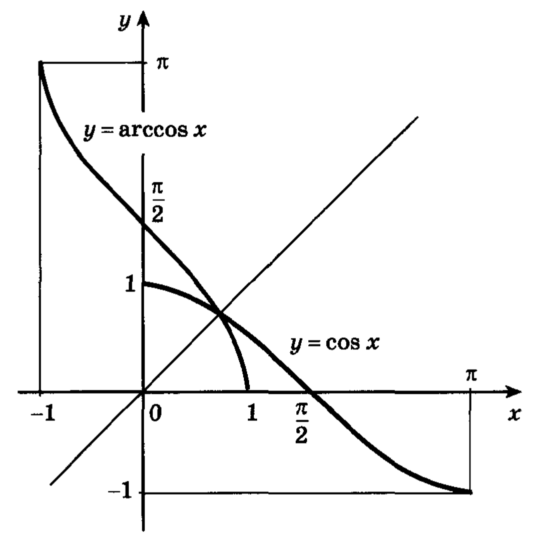


Рис. 99

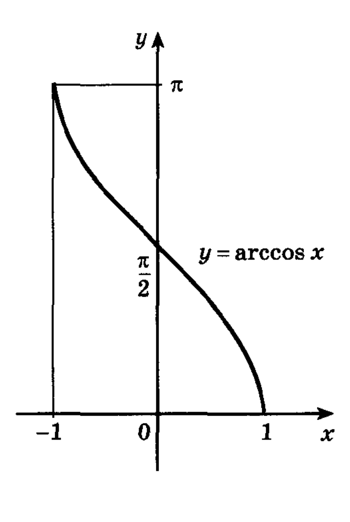


Рис. 100

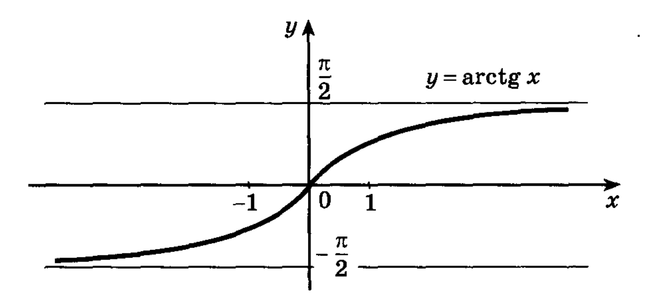


Рис. 101

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (рис. 94), симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 101).



Перечислим основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает.

4) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*.

Задача 1 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arcsin \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

▶ 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возрастает, то $\arcsin \frac{1}{3} > \arcsin \frac{1}{4}$.

2) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, то $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\arccos(2x+1) = \frac{3\pi}{4}$.

▶ Так как $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x + 1 = \cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \arcsin\frac{x-1}{3}.$$

▶ Так как функция $y = \arcsin x$ определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то функция $y = \arcsin\frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняются неравенства $-1 \leqslant \frac{x-1}{3} \leqslant 1$. Отсюда

$$-3 \leqslant x - 1 \leqslant 3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 4. \quad ◁$$

Упражнения

Сравнить числа (**750—752**).

750 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

751 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решить уравнение (**753—755**).

753 1) $\arcsin(2-3x) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x) = \frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin\frac{x-2}{4} = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{x+3}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

754 1) $\arccos(2x+3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(3x+1) = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$; 4) $\arccos\frac{2x-1}{3} = \pi$.

755 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4} = \frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{3} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg}(2x+1) = -\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(2-3x) = -\frac{\pi}{4}$.

756 Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$; 2) $y = \arccos (2 - 3x)$;

3) $y = \arccos (2\sqrt{x} - 3)$; 4) $y = \arcsin \frac{2x^2-5}{3}$.

757 Доказать, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения к главе VII



758 Найти область определения функции:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = \sqrt{\cos x}$;

5) $y = \frac{2x}{2 \sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x - \sin x}$.

759 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2 \sin^2 x$; 2) $y = 2 \cos^2 x - 1$;

3) $y = 3 - 2 \sin^2 x$; 4) $y = 2 \cos^2 x + 5$;

5) $y = \cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4$;

6) $y = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3$.

760 Выяснить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = x^2 + \cos x$; 2) $y = x^3 - \sin x$;

3) $y = (1 - x^2) \cos x$; 4) $y = (1 + \sin x) \sin x$.

761 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \cos 7x$; 2) $y = \sin \frac{x}{7}$.

762 Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;

3) $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\cos x + 1 = 0$.

763 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$:

1) $1 + 2 \cos x \geqslant 0$; 2) $1 - 2 \sin x < 0$;

3) $2 + \operatorname{tg} x > 0$; 4) $1 - 2 \operatorname{tg} x \leqslant 0$.

764 Используя графики, найти число корней уравнения:

1) $\cos x = x^2$; 2) $\sin x = \frac{x}{2}$.

Проверь себя!

1 **Найти область определения функции $y = \text{tg}\, 4x$. Является ли эта функция четной?**

2 **Построить графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$. Для каждой из этих функций найти значения x из данного отрезка, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) > 0$, $y(x) < 0$.**

3 **Построить схематически график функции $y = \text{tg}\, x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти значения x, при которых $\text{tg}\, x = 0$, $\text{tg}\, x < 0$, $\text{tg}\, x > 0$ на данном отрезке.**

765 Найти область определения функции:

1) $y = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \sqrt{\text{tg}\, x}$.

766 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 1 - 2\,|\sin 3x|$; 4) $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

767 Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y = \sin x + \text{tg}\, x$; 2) $y = \sin x\, \text{tg}\, x$; 3) $y = \sin x\, |\cos x|$.

768 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin(2x + 1)$; 2) $y = 3\,\text{tg}\,\frac{1}{4}(x + 1)$.

769 Решить графически уравнение:

1) $\cos x = |x|$; 2) $\sin x = -|x + 1|$.

770 Найти нули функции:

1) $y = \cos^2 x - \cos x$; 2) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

771 Найти все значения x, при которых функция $y = 1{,}5 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ принимает положительные значения.

772 Найти все значения x, при которых функция $y = \text{tg}\, 2x - 1$ принимает отрицательные значения.

773 Построить график функции:

1) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; 2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

774 Найти множество значений функции:

1) $y = 12\sin x - 5\cos x$; 2) $y = \cos^2 x - \sin x$.

775 Решить неравенство:

1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\text{tg}\, x > \sin x$.



глава

Производная и ее геометрический смысл

У каждого человека есть определенный кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.

Д. Гильберт

Производная



Задача 1 На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

▶ Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s = 80$, $a = 1{,}6$, поэтому $80 = 0{,}8t^2$, откуда $t = 10$ с. По формуле $v = at$ находим мгновенную скорость $v = 1{,}6 \cdot 10 = 16$, т. е. $v = 16$ м/с. ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач. Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения; от скорости запуска спутника зависит выход его на заданную орбиту. При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени. Рассмотрим, *как связаны*

между собой средняя и мгновенная скорости движения.

Пусть точка движется вдоль прямой и за время t от начала движения проходит путь $s(t)$, т. е. задана функция $s(t)$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t и рассмотрим промежуток времени от t до $t+h$, где h — малое число. За время от t до $t+h$ точка прошла путь длиной

$$s(t+h)-s(t).$$

Средняя скорость движения точки за этот промежуток времени равна отношению

$$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Из курса физики известно, что при уменьшении h это отношение приближается к некоторому числу, которое называется *мгновенной скоростью* в момент времени t и обозначается $v(t)$. Число $v(t)$ называют пределом данного отношения при h, стремящемся к нулю, и записывают так:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

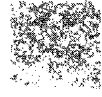
Это равенство означает, что отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ можно рассматривать как приближенное значение мгновенной скорости $v(t)$. Если h, уменьшаясь, стремится к нулю, то погрешность приближения становится сколь угодно малой, т. е. также стремится к нулю.

Например, если $s(t)=3t^2$, то

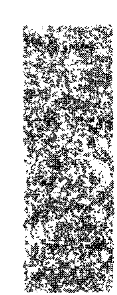
$$v_{ср}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{3(t+h)^2-3t^2}{h}=$$
$$=\frac{6th+3h^2}{h}=6t+3h.$$

Если $h\to 0$, то $6t+3h\to 6t$, т. е. $v_{ср}\to v(t)=6t$.

Отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h\to 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).



Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h\neq 0$, такое, что $x+h$ также принадле-



жит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число h, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x + h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке*. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Задача 2 Найти производную функции $f(x) = x^2$.

▶ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$, поэтому

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◁

Задача 3 Найти производную функции $f(x) = x^3$.

▶ Найдем сначала разность $f(x + h) - f(x) =$
$= (x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 =$
$= h(3x^2 + 3xh + h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$. Следовательно,

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2$, т. е. $(x^3)' = 3x^2$. ◁

Задача 4 Найти производную функции $f(x) = C$, где C — заданное число.

▶ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0$. Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \to 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е. $(C)' = 0$. ◁

Задача 5 Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

▶ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k(x+h) + b - (kx+b)}{h} = \frac{kh}{h} = k$.

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \to 0$ также равен k. Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◁

Применяя формулу

$$(kx + b)' = k,$$

например, получаем

$$(3x + 7)' = 3, \quad (-2x + 1)' = -2, \quad (5x)' = 5, \quad (x)' = 1.$$

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. По этой причине в школьном курсе математики некоторые формулы производных строго не доказываются или вообще принимаются без доказательства.

При нахождении производных простейших функций мы пользуемся наглядными представлениями. Например, мы считаем наглядно понятным, что если $h \to 0$, то $5h \to 0$, $h^2 \to 0$, $5 - 3h \to 5$ и т. п. Тем не менее приведем здесь строгое определение предела функции в точке и поясним его.

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Поясним это определение предела функции. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если значения $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0, становятся как угодно близкими к числу A, т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

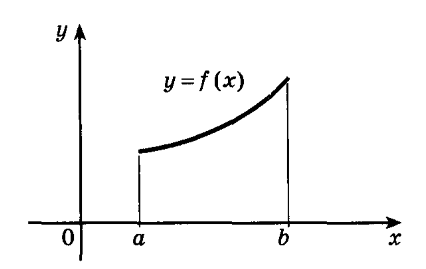


Рис. 102

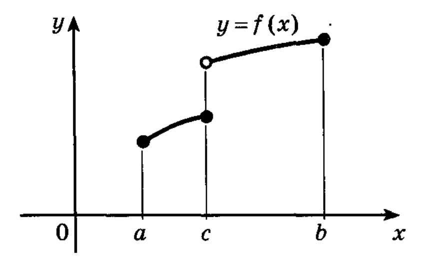


Рис. 103

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε.

Например, если $f(x) = (x-2)^2 + 3$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

Действительно, $|f(x) - 3| = |x - 2|^2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|x-2|^2 < \varepsilon$, равносильно неравенству $|x - 2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x - 2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta = 0{,}1$, а если $\varepsilon = 0{,}0001$, то $\delta = 0{,}01$.

Производная функции является одним из особых пределов, имеющих большое практическое значение.

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке* (рис. 102).

Приведем примеры функций, которые не являются непрерывными. Например, на рисунке 103 изображен график функции, которая непрерывна на промежутках $[a; c]$ и $(c; b]$, но разрывна в точке $x = c$ и потому не является непрерывной на всем отрезке $[a; b]$. Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены. Сформулируем теперь строгое определение *непрерывности функции*.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то ее называют *непрерывной на этом интервале.*

Например, функция $f(x)$, график которой изображен на рисунке 103, непрерывна на интервале $(a; c)$, но не является непрерывной на интервале $(a; b)$.

Отметим, что если функция имеет производную на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция $y = |x|$ непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке $x = 0$.

Действительно,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому разностное отношение $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Еще пример: функция $y = |\log_2 x|$ непрерывна на промежутке $x > 0$, но не имеет производной в точке $x = 1$ (рис. 104).

Рис. 104

Задача 6* Выяснить, в каких точках непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{при } x \neq 3, \\ 5 & \text{при } x = 3. \end{cases}$$

▶ Если $x \neq 3$, то $f(x) = x + 3$, поэтому данная функция непрерывна во всех точках $x \neq 3$, так как

$$\lim_{x \to x_0} (x + 3) = x_0 + 3, \text{ если } x_0 \neq 3.$$

Если $x_0 = 3$, то $x_0 + 3 = 6$, а по условию $f(3) = 5$, т. е. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$, и поэтому данная функция не является непрерывной в точке $x = 3$. ◁

Упражнения

776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.

777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке [1; 1,2], если закон ее движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.

778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.

779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.

780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.

781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.

782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

784 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 105). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках [0; 1], [1; 2], [2; 3].

785 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 106). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках [0; 2], [2; 3], [3; 3,5].

786 Используя определение предела функции в точке, выяснить, является ли верным равенство:
1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

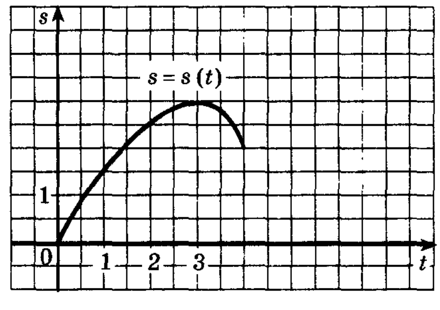


Рис. 105

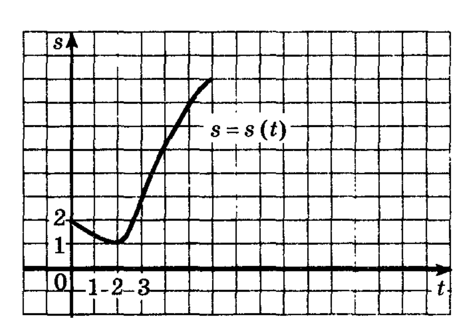


Рис. 106

Производная степенной функции



Задача 1 Доказать, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

▶ Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x} = -\frac{h}{(x+h)\,x},$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{(x+h)\,x}.$$

Если $h \to 0$, то $x + h \to x$, и поэтому знаменатель дроби стремится к x^2. Следовательно, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

При этом предполагалось, что если $x > 0$, то и $x + h > 0$, а если $x < 0$, то и $x - h < 0$. Таким образом, формула $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x \neq 0$. ◁

Задача 2 Доказать, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

▶ Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $x + h > 0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Получим

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Если $h \to 0$, то $\sqrt{x+h}$ стремится к $\sqrt{x}$, поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, формула $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x > 0$. ◁

Итак, в этом и предыдущем параграфах получены следующие формулы для производных:

$$C' = 0,\ (x)' = 1,\ (x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ \ (x \neq 0),\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ (x > 0).$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции $f(x) = x^p$ для $p = 2,\ 3,\ -1,\ \frac{1}{2}$. Их можно записать так:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x,\quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2},\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \qquad (1)$$

Эта формула применима при тех значениях x, при которых ее правая часть имеет смысл.

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Задача 3 Вычислить $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}$, $f'(9) = -\frac{1}{2}\,9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}$. ◁

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx + b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x - 1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x - 1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk\,(kx + b)^{p-1}. \qquad (2)$$

По формуле (2) при $k = 3$, $b = -1$, $p = 7$ имеем

$$((3x - 1)^7)' = 21\,(3x - 1)^6.$$

Задача 4 Вычислить $f'(-3)$, если $f(x) = \sqrt{4-7x}$.

▶ Запишем данную функцию так: $f(x) = (-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x = -3$ получаем $f'(-3) = -\frac{7}{2}25^{-\frac{1}{2}} = -0{,}7$. ◁

Задача 5* Доказать, что $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке:

1) $x > 0$; 2) $x < 0$.

▶ 1) Если $x > 0$, то $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Если $x < 0$, то $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{(-x)} = -(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем

$$(\sqrt[3]{x})' = (-1)\cdot\frac{1}{3}(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \quad ◁$$

Упражнения

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{1}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

793 Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;

5) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $x_0 = 1$; 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0 = 1$.

794 Построить график функции $y = x^4$ и график функции, являющейся ее производной.

795 На рисунке 107 изображен график функции, являющейся производной одной из функций $y = x^2$, $y = x^3$ или $y = x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

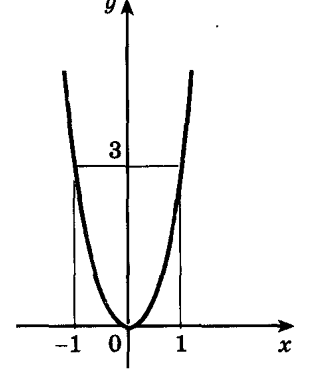


Рис. 107

796 Найти производную функции:



1) $\dfrac{1}{(2+3x)^2}$; 2) $\dfrac{1}{(3-2x)^3}$;

3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$; 4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

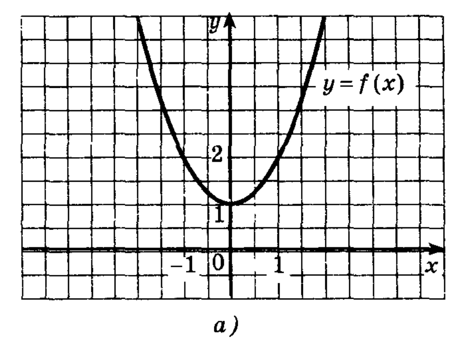
798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

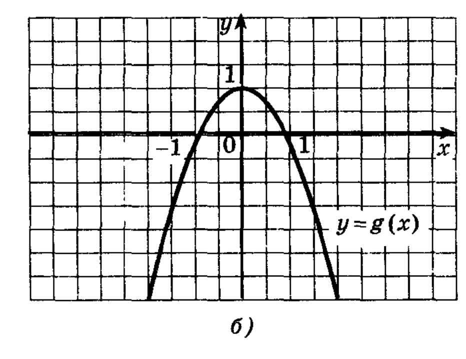
1) $f(x) = (2x-1)^2$; 2) $f(x) = (3x+2)^3$?

800 По данному на рисунке 108 графику квадратичной функции написать формулы, задающие саму функцию и ее производную.

801 Найти значения x, при которых значения функции $y = \sqrt{3x-7}$ равны значениям функции, являющейся ее производной.



а)



б)

Рис. 108

§ 46 Правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:



1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

●* Обозначим $f(x)+g(x)=F(x)$. Тогда $F(x+h)-F(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

При $h \to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$; вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x)=f'(x)+g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1). ○

Аналогично доказывается, что производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

Задача 1 Найти производную функции:

1) $f(x)=x^3-x^2+x-3$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ 1) $f'(x)=(x^3)'-(x^2)'+(x)'-(3)'=3x^2-2x+1$;

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ◁

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \qquad (2)$$

●* Обозначим $cf(x) = F(x)$, тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

откуда при $h \to 0$ получаем $F'(x) = cf'(x)$. ○

Задача 2 Вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$.

▶ $f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' -$

$- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7,$

$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9.$ ◁

Приведем без доказательства формулы производной произведения и частного.

3. Производная произведения:

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x). \qquad (3)$$

Задача 3 Проверить справедливость формулы (3), если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

▶ В левой части формулы (3) получаем

$$(f(x)\,g(x))' = ((3x^2 - 5)(2x + 7))' =$$
$$= (6x^3 + 21x^2 - 10x - 35)' = 18x^2 + 42x - 10.$$

В правой части формулы (3) получаем

$$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) =$$
$$= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' =$$
$$= 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5)\,2 = 18x^2 + 42x - 10.$$ ◁

Задача 4 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = (x - 1)^9(x + 2)^6$ равно нулю.

▶ По формуле (3) получаем $f'(x) = 9(x - 1)^8(x + 2)^6 + 6(x - 1)^9(x + 2)^5 = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(3x + 6 + 2x - 2) = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4)$.

Решая уравнение $3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4) = 0$, находим, что $f'(x) = 0$ при

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -0{,}8.$$ ◁

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

Задача 5 Найти производную функции $F(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

▶ Обозначим $x^3 = f(x)$, $x^2 + 1 = g(x)$. По формуле (4) находим $F'(x) = \frac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$. ◁

Задача 6 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$:

1) положительно; 2) отрицательно.

▶ По формуле (4) получаем $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

1) Решая неравенство $\frac{-2x}{(x^2+3)^2} > 0$, находим, что $f'(x) > 0$ при $x < 0$.

2) Решая неравенство $\frac{-2x}{(x^2+3)^2} < 0$, находим, что $f'(x) < 0$ при $x > 0$. ◁

5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как *сложную функцию* $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, *сложная функция — это функция от функции* $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y)\,g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x). \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры.

1) Пусть $F(x) = (2x+1)^2 + 5(2x+1)$.
Здесь $f(y) = y^2 + 5y$, $y = g(x) = 2x + 1$.
По формуле (5) находим $F'(x) = (2y+5)\cdot(2x+1)' = (2y+5)\,2 = (2(2x+1)+5)\,2 = 8x + 14$.

2) Пусть $F(x) = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Здесь $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$, $y = g(x) = x^2 + 1$. По формуле (5) находим

$$F'(x) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,2x = 3x\sqrt{x^2+1}.$$

Упражнения

Найти производную функции (802—803).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$; 5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$; 4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$; 7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3\,(x - 2)^2 + 1$ и график функции, являющейся ее производной.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

808 Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x, если:

1) $y = \frac{2}{x-1}$, $x = 1$; 2) $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x = 3$;

3) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$; 4) $y = \sqrt{5-x}$, $x = 4$?

809 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x + 2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x - 1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = (x - 1)^8 (2 - x)^7$; 2) $f(x) = (2x - 1)^5 (1 + x)^4$;
3) $f(x) = \sqrt{2 - x}\,(3 - 2x)^8$; 4) $f(x) = (5x - 4)^6 \sqrt{3x - 2}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x - 3)^5 (2 + 5x)^6$ равно 0?

814 Найти производную функции:

1) $\dfrac{x^5 + x^3 + x}{x + 1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x - 1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 - 7x}$.

816 Найти функцию $f(g(x))$, если:

1) $g(x) = 1 - x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$; 2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$.

817 Представить в виде сложной функции:

1) $F(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$; 2) $F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Найти производную функции (**818—821**).

818 1) $\dfrac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\dfrac{x\sqrt[3]{x} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}}$.

819 1) $\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

820 1) $(2x - 3)^5 (3x^2 + 2x + 1)$; 2) $(x - 1)^4 (x + 1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x + 2}\,(3x - 1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x + 1} \cdot (2x - 3)^3$.

821 1) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$; 2) $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$; 3) $\dfrac{2 - x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2 - x}$.

822 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0?

823 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ равно 3?

824 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равно 11?

825 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$;

3) $f(x) = (x + 2)^2 \sqrt{x}$; 4) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$.

826 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $y = (5 - 3x)^4 (3x - 1)^3$;
2) $y = (2x - 3)^2 (3 - 2x)^3$;
3) $y = \frac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$;
4) $y = \frac{3x^3}{1 - 3x}$.

827 Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t = 20$ с.

828 Тело, масса которого $m = 5$ кг, движется прямолинейно по закону $s = 1 - t + t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

829 В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m = 2l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность:

1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см;
2) в конце стержня.

830 Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.




§ 47 Производные некоторых элементарных функций

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

1. Производная показательной функции.

Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой ее точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad (1)$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: ее производная также равна e^x, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx + b})' = ke^{kx + b}. \qquad (3)$$

Например, $(e^{3x + 1})' = 3e^{3x + 1}$, $(e^{-2x - 4})' = -2e^{-2x - 4}$.

Задача 1 Найти производную функции a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$. ◁

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Например, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0,7^x)' = 0,7^x \ln 0,7$.

2*. Производная логарифмической функции.

Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (5)$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \qquad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}. \qquad (7)$$

Например, $(\ln(4x - 3))' = \dfrac{4}{4x - 3}$, $(\ln(1 - 2x))' = \dfrac{-2}{1 - 2x} = \dfrac{2}{2x - 1}$.

Задача 2 Найти производную функции $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (5) и (6), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \triangleleft$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (8)$$

Например, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$, $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

3. Производные тригонометрических функций. Покажем, как можно вывести формулу производной синуса. Обозначим $f(x) = \sin x$, составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \qquad (9)$$

Если $h \to 0$, то $x + \frac{h}{2} \to x$ и $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x$.

Можно доказать, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1,$$

и поэтому правая часть (9) имеет предел, равный $\cos x$. Следовательно, левая часть (9) также имеет предел, который по определению равен $f'(x)$.

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично можно убедиться в том, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Итак, справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \qquad (10)$$

Справедливы также формулы

$$(\sin(kx + b))' = k \cos(kx + b),$$
$$(\cos(kx + b))' = -k \sin(kx + b).$$

Например, $\left(\sin\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\right)' = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$,

$(\cos(3 - 4x))' = -(-4)\sin(3 - 4x) = 4\sin(3 - 4x)$.

Задача 3 Найти производную функции $\operatorname{tg} x$.

▶ Используя правило дифференцирования частного и формулы (10), находим $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ◁

4. Применение правил дифференцирования и формул для производных к решению задач. Приведем сводную таблицу.

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$ $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)},$ $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$
$((x)^p)' = px^{p-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$ $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

Задача 4 Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin(2x + 1) - 3\cos(1 - x)$;

2) $f(x) = e^{-3x} \sin(5x - 1)$; 3) $f(x) = \frac{\ln 3x}{x + 1}$.

▶ 1) $f'(x) = 2\cos(2x + 1) - 3\sin(1 - x)$;

2) $f'(x) = -3e^{-3x}\sin(5x - 1) + 5e^{-3x}\cos(5x - 1)$;

3) $f'(x) = \frac{\frac{3}{3x} \cdot (x+1) - 1 \cdot \ln 3x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x\ln 3x}{x(x+1)^2}$. ◁

Задача 5* Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = x^2 - 2\ln x$ равно нулю; положительно; отрицательно.

▶ Найдем производную $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

Заметим, что равенство $(x^2 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x}$ справедливо при тех значениях x, при которых обе части имеют смысл, т. е. при $x > 0$.

Выражение $\frac{2(x^2-1)}{x}$ равно нулю при $x_{1,2} = \pm 1$, положительно на промежутках $-1 < x < 0$ и $x > 1$; отрицательно на промежутках $x < -1$ и $0 < x < 1$. Так как $x > 0$, то $f'(x) = 0$ только при $x = 1$; $f'(x) > 0$ при $x > 1$; $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$. ◁

Упражнения

Найти производную функции (**831—839**).

831 1) $e^x + 1$; 2) $e^x - x^2$; 3) $e^{2x} + \frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x} + \sqrt{x}$.

832 1) $e^{2x-1} + 2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1} - \sqrt{x-1}$; 3) $e^{0,3x-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $e^{1-x} + x^{-3}$; 5) e^{x^2}; 6) e^{2x^3}.

833 1) $2^x + e^x$; 2) $3^x - x^{-2}$; 3) $e^{2x} - x$; 4) $e^{3x} + 2x^2$; 5) 3^{x^2+2}.

834 1) $0,5^x + e^{3x}$; 2) $3^x - e^{2x}$; 3) $e^{2-x} + \sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x} + \frac{1}{x^4}$.

835 1) $2 \ln x + 3^x$; 2) $3 \ln x - 2^x$; 3) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3} - \log_3 x$; 5) $\ln(x^2 - 2x)$; 6) $(3x^2 - 2)\log_3 x$.

836 1) $\sin x + x^2$; 2) $\cos x - 1$; 3) $\cos x + e^x$; 4) $\sin x - 2^x$.

837 1) $\sin(2x - 1)$; 2) $\cos(x + 2)$; 3) $\sin(3 - x)$; 4) $\cos(x^3)$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 3\right) + 2^x$; 3) $3\cos 4x - \frac{1}{2x}$.

839 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x \cdot \cos 3x$; 4) $\log_3 x \cdot \sin 2x$.

840 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = e^{3x-2} - \ln(3x - 1)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

3) $f(x) = 2^x - \log_2 x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3^x$, $x_0 = 1$.

841 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = x - \cos x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$;

3) $f(x) = 2\ln(x + 3) - x$; 4) $f(x) = \ln(x + 1) - 2x$;

5) $f(x) = x^2 + 2x - 12\ln x$; 6) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x$.

842 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = x \ln 2 - 2^x$;

3) $f(x) = e^x x^2$; 4) $f(x) = e^x \sqrt{x}$.

Найти производную функции **(843—851)**.

843 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln \frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln \frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos \frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin \frac{1+x}{4}$.

844 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}} - 3\cos \frac{x-2}{3}$; 2) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}}$.

845 1) $0{,}5^x \cdot \cos 2x$; 2) $5\sqrt{x} \cdot e^{-x}$; 3) $e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x)$.

846 1) $\ln \sqrt{x-1}$; 2) $e^{\sqrt{3-x}}$; 3) $\ln(\cos x)$; 4) $\ln(\sin x)$.

847 1) $2^{\cos x + 1}$; 2) $0{,}5^{1+\sin x}$; 3) $\cos \sqrt[3]{x+2}$; 4) $\sin(\ln x)$.

848 1) $\sqrt{x^2+2x-1}$; 2) $\sqrt[3]{\sin x}$; 3) $\sqrt[4]{\cos x}$; 4) $\sqrt{\log_2 x}$.

849 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x - 5}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x + 7}$.

.**850** 1) $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x - \log_2 x}{\ln 2 \cdot x}$.

851 1) $\frac{\sin x - \cos x}{x}$; 2) $\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x}$.

852 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x) = 1 - 5\cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x$.

853 Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно 0:

1) $f(x) = e^{2x}\ln(2x-1)$; 2) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$.

854 Вычислить $f'(x) + f(x) - 2$, если $f(x) = x \sin 2x$, $x = \pi$.

855 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

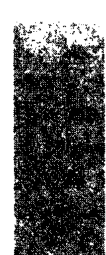
1) $f(x) = x - \ln x$; 2) $f(x) = x \ln x$;

3) $f(x) = x^2 \ln x$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln x$.

856 Найти производную функции $\ln(x^2 - 5x + 6)$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 48 Геометрический смысл производной

Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 109). Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол α — *углом между этой прямой и осью* Ox.



Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 109, *а*); в этом случае функция возрастает и говорят, что прямая направлена вверх.

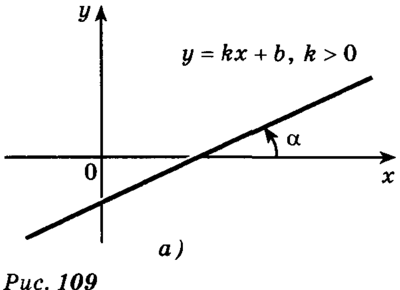
Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (рис. 109, *б*); в этом случае функция $y = kx + b$ убывает и говорят, что прямая направлена вниз.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y = f(x)$.

Пусть точки A и M принадлежат графику функции $y = f(x)$ (рис. 110).

Пусть x и $x + h$ — абсциссы точек A и M (рис. 111), тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x + h)$. Из треугольника ACM (рис. 111), где $C(x + h;\ f(x))$, найдем угловой коэффициент k прямой AM, который зависит от h (его можно рассматривать как функцию от h и писать $k(h)$). Имеем $k(h) = \operatorname{tg}\angle CAM = \frac{MC}{AC}$, где $MC = f(x + h) - f(x)$, $AC = h$, т. е.

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$



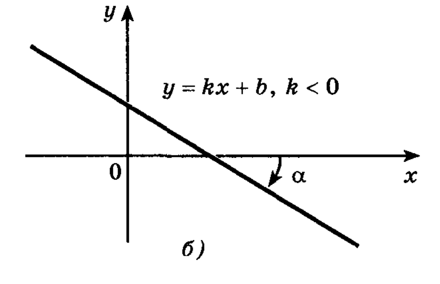


Рис. 109

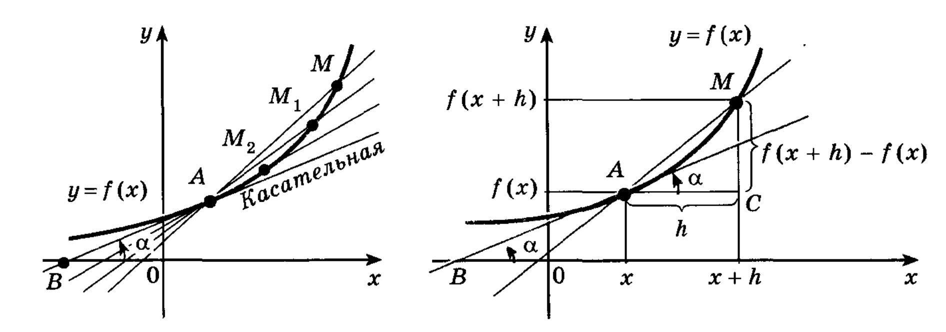


Рис. 110 *Рис. 111*

Пусть число x фиксировано, а $h \to 0$, тогда точка A неподвижна, а точка M, двигаясь по графику, стремится к точке A (рис. 111). При этом прямая AM стремится занять положение некоторой прямой, которую называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$, потому что $\lim\limits_{h \to 0} k(h)$, существует и равен $f'(x)$. Итак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

Задача 1 Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$ и осью Ox.

▶ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$, т. е. значение производной этой функции при $x = 0$. Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{(рис. 112).} \ \triangleleft$$

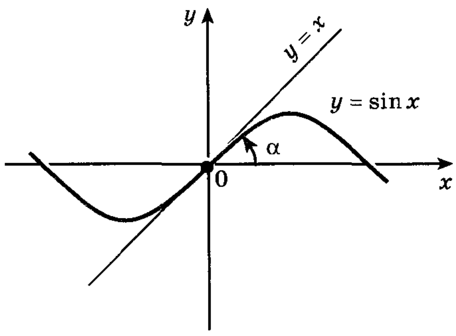


Рис. 112

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке $(0; 0)$ синусоида касается прямой $y = x$ (рис. 112).

Задача 2 Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox и написать уравнение этой касательной.

▶ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 113).

Найдем теперь уравнение касательной AB к параболе $y = x^2$ в точке A (1; 1) (см. рис. 113). Если $y = kx + b$ — уравнение прямой AB, то $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = 2x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки (1; 1), получаем $1 = 2 \cdot 1 + b$, откуда $b = -1$. Следовательно, $y = 2x - 1$ — уравнение искомой касательной. ◁

Аналогично тому, как это сделано в задаче 2, выведем *уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке* $(x_0; f(x_0))$ (рис. 114).

● Если $y = kx + b$ — искомое уравнение, то по формуле (2) находим $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)\, x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(x_0; f(x_0))$, получаем $f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$.

Итак, уравнение касательной $y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad ○ \qquad (3)$$

Задача 3 Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

▶ Найдем значения функции $f(x) = \cos x$ и ее производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

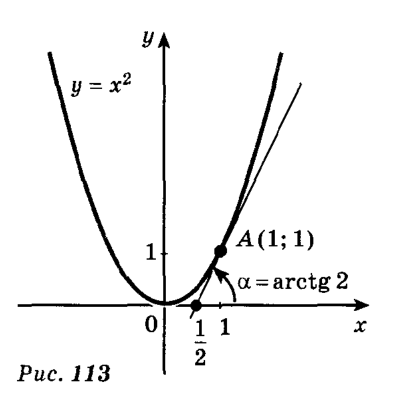


Рис. 113

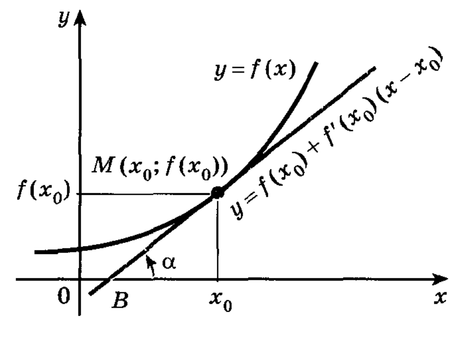


Рис. 114

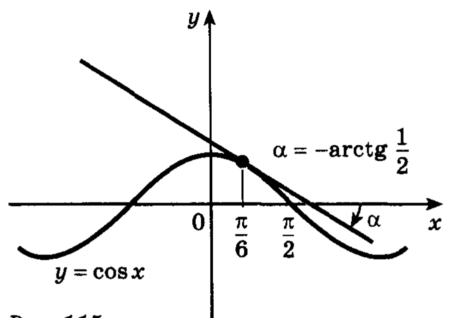


Рис. 115

Используя формулу (3), найдем искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

или $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ◁

Касательная к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 115.

Задача 4* Показать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

▶ Пусть $f(x) = x^2$, тогда

$$f'(x) = 2x, \quad f(x_0) = x_0^2 \quad \text{и} \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

По формуле (3) находим уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2.$$

Найдем точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x - x_0^2 = 0$ находим $x = \frac{x_0}{2}$. ◁

Отсюда следует простой геометрический *способ построения касательной к параболе* $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 116).

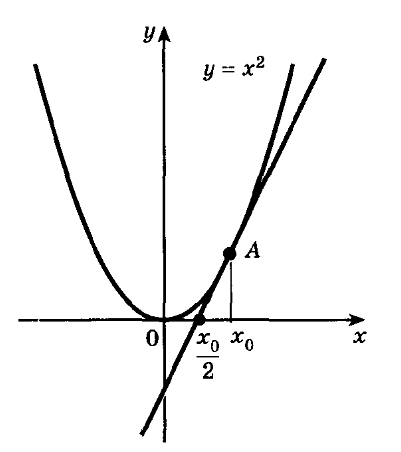


Рис. 116

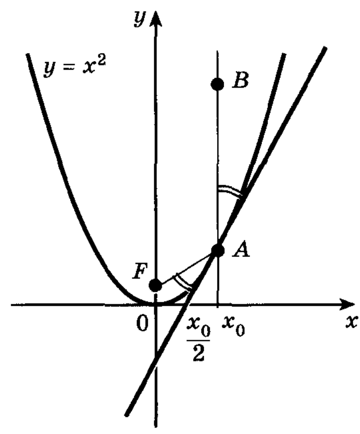


Рис. 117

Построив касательную к параболе, можно построить ее *фокус* F. Напомним, что фокусом является точка, в которую нужно поместить источник света, чтобы все лучи, отраженные от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. Для построения фокуса F нужно построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB (рис. 117).

Упражнения

857 Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$;
2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;
3) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$;
4) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

858 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$.

859 Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

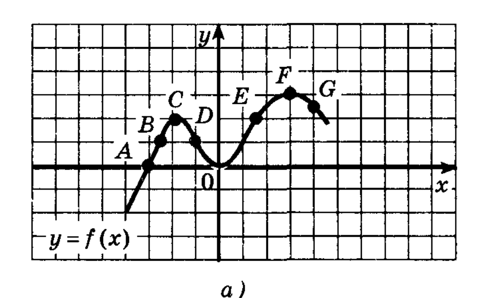
1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 3$;
5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 2$.

860 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

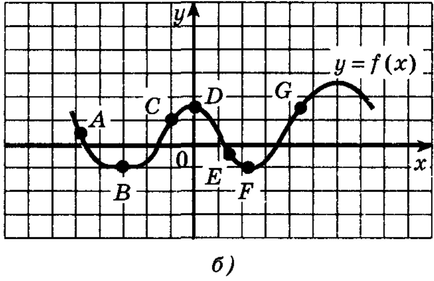
1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$;
4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
8) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

861 Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 118, *а*, *б*). В каких точках A, B, C, D, E, F, G производная этой функции принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) значения, равные 0?



а)



б)

Рис. 118

862 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$; 2) $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1)$.

863 Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + e^{-x}$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = \sqrt{x+1} + e^2$.

864 Под каким углом пересекаются графики функций (*углом между кривыми* в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$; 2) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

3) $y = \ln(1+x)$ и $y = \ln(1-x)$; 4) $y = e^x$ и $y = e^{-x}$?

865 Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке общую касательную. Написать уравнение этой касательной:

1) $y = x^4$ и $y = x^6 + 2x^2$;
2) $y = x^4$ и $y = x^3 - 3x^2$;
3) $y = (x+2)^2$ и $y = 2 - x^2$;
4) $y = x(2+x)$ и $y = x(2-x)$.

866 Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $k = \frac{3}{2}$; 2) $f(x) = \sqrt{3x-1}$, $k = \frac{3}{4}$;

3) $f(x) = \sin 2x$, $k = 2$; 4) $f(x) = x + \sin x$, $k = 0$.

867 В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

868 Найти точки, в которых касательные к кривым

$$f(x) = x^3 - x - 1 \text{ и } g(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

параллельны. Написать уравнения этих касательных.

Упражнения к главе VIII

Найти производную функции (869—874).

869 1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4$; 2) $-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$;

3) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x + 3)^8$;

6) $(4 - 3x)^7$; 7) $\sqrt[3]{3x-2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

870 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \ln x$; 3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

871 1) $\sin 5x + \cos(2x - 3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;

3) $\sin(x - 3) - \ln(1 - 2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.

872 1) $x^2\cos x$; 2) $x^3\ln x$; 3) $5xe^x$;

4) $x\sin 2x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x\cos x$.

873 1) $\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.

874 1) $\sin^3 x$; 2) $8^{\cos x}$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\ln(x^3)$.

875 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2$; 2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$;

3) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$; 4) $f(x) = (x + 3)^3(x - 4)^2$;

5) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

876 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = \cos x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = e^x\ln x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$, $x_0 = 0$.

877 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; 2) $y = x^3 + 3x$, $x_0 = 3$;

3) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

878 Закон движения тела задан формулой $s(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройден телом за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

Проверь себя!

1 **Найти значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 4x - 1$ в точке $x = 3$.**

2 **Найти производную функции:**

1) $\frac{3}{x} + 2\sqrt{x} - e^x$; **2)** $(3x - 5)^4$; **3)** $3 \sin 2x \cos x$; **4)** $\frac{x^3}{x^2 + 5}$.

3 **Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.**

4 **Найти угол между касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ и осью Ox.**

Найти производную функции (**879—881**).

879 1) $y = \cos^2 3x$; 2) $y = \sin x \cos x + x$;

3) $y = (x^3 + 1) \cos 2x$; 4) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$;

5) $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x - 1}\,(x^4 - 1)$.

880 1) $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x + 4}}{4x}$;

3) $y = \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$; 4) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

881 1) $\log_2 (x^3 - x^2 + 1)$; 2) $(\log_2 x)^3$; 3) $\sin (\log_3 x)$; 4) $\cos 3^x$.

882 На каком из рисунков 119 (*а—г*) изображены эскизы графиков функций, являющихся производными следующих функций: $y = e^x$, $y = \ln(-x)$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \cos x$?

883 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

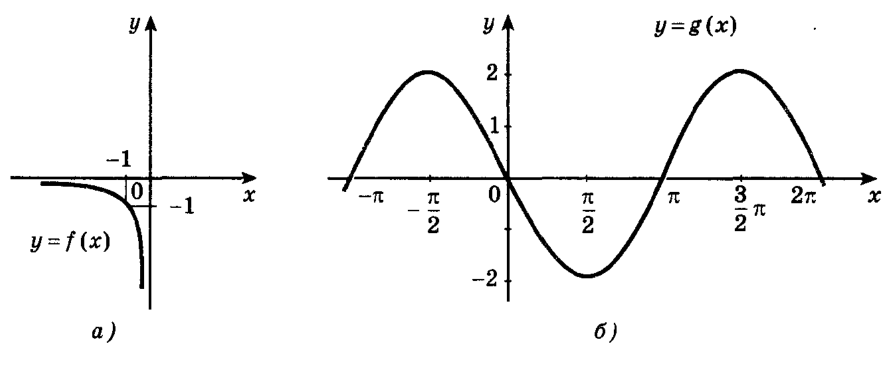
1) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 2) $f(x) = 3^{2x} - 2x \ln 3$;

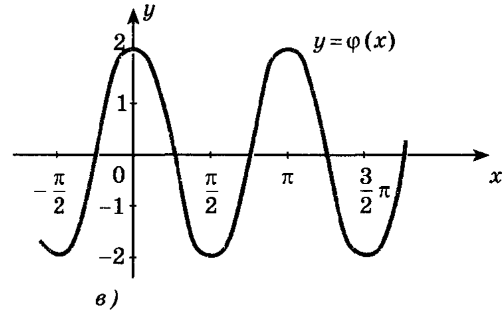
3) $f(x) = x + \ln 2x$; 4) $f(x) = x + \ln(2x + 1)$;

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$; 6) $f(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 3x$.

884 Найти все значения a, при которых $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

885 Найти все значения a, при которых $f'(x) \leqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$.





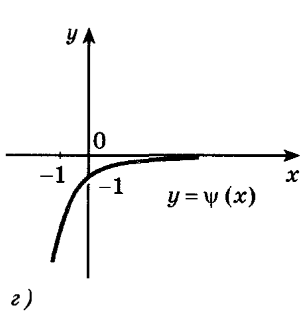


Рис. 119

886 Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x^2}$;   2) $f(x) = ax + \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 6x$;   4) $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax$.

887 Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x) < 0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x) = ax^7 + x^3 - 1$;   2) $f(x) = x^5 + ax^3 + 3$;

3) $f(x) = (x + a)\sqrt{x}$;   4) $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

888 Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6 - x}$;   2) $y = \sqrt{2x + 1}$ и $y = 1$?

889 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = 2\sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$;   2) $y = 2^{-x} - 2^{2x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{x + 2}{3 - x}$, $x_0 = 2$;   4) $y = x + \ln x$, $x_0 = e$.

890 Найти уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$.

891 Прямая касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ в точке (1; 4). Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

892 Прямая касается гиперболы $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, в точке с абсциссой x_0.

1) Доказать, что площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания. Найти эту площадь.

2) Доказать, что эта касательная проходит через точки $\left(x_0; \frac{2k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$.

893 Выяснить, при каких значениях p касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - px$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$, проходит через точку M (2; 3).

894 Найти все такие точки графика функции $y = \frac{4^x - 2^{x-1}}{\ln 4}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = 2x + 5$.

895 Найти расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y = x \ln x$, которая параллельна оси абсцисс.

896 Выяснить, при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ касается графика функции $y = 1 + \ln x$.

897 Найти общие касательные к графикам функций

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ и } g(x) = -x^2 + 6x - 10.$$

898 Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 - 6$ пересекают оси координат: одна — в точках A и B, другая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если она в 4 раза меньше площади треугольника COD.



IX глава

Применение производной к исследованию функций

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх всего того, и умение.

А. Н. Крылов

§ 49 Возрастание и убывание функции

1. Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, ее наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.*

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вверх, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120).

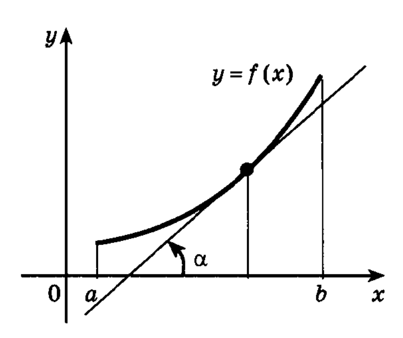


Рис. 120

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику

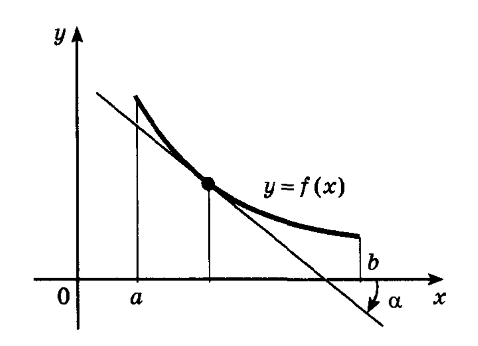


Рис. 121

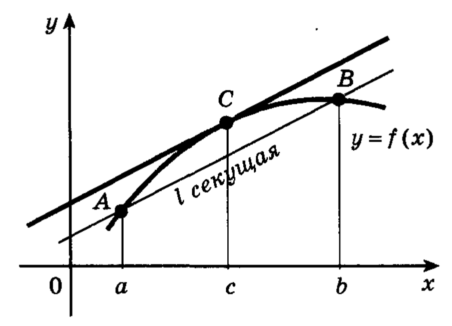


Рис. 122

функции $y = f(x)$ отрицателен. Это означает, что касательная к графику функции направлена вниз, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

Строгое доказательство этого утверждения выходит за рамки школьного курса математики.

2. При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется теорема 1, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

Доказательство формулы (1) приводится в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл этой формулы.

Проведем через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ прямую l и назовем эту прямую секущей. Угловой коэффициент секущей равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Запишем формулу (1) в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Согласно формуле (2) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c (рис. 122) равен угловому коэффициенту секущей l, т. е. на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей. Сформулируем и докажем с помощью теоремы Лагранжа *теорему о достаточном условии возрастания функции.*

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

● Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $(a; b)$ такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in (x_1; x_2).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из последней формулы получим $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. ○

Таким же способом можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a; b]$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$; если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она убывает на отрезке $[a; b]$.

Задача 1 Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$.

▶ Найдем производную: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Если $x > 1$, то $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, т. е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $x > 1$. ◁

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют *промежутками монотонности этой функции.*

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $x < 0$, $x > 2$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $0 < x < 2$. ◁

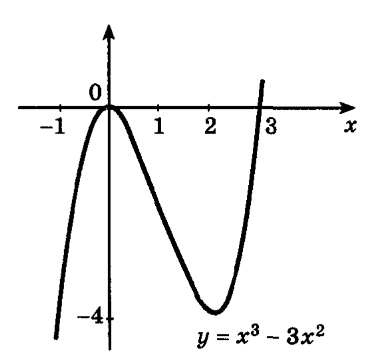


Рис. 123

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображен на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $x < 0$ и $x > 2$, но и на промежутках $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; убывает не только на интервале $0 < x < 2$, но и на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

900 Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 - 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

901 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < 5$, $f(1) = 0$, $f(5) = 3$;
2) $a = -1$, $b = 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = -4$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции **(902—905)**.

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2-3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

906 Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 6$, $f(-2) = -1$, $f(6) = 5$, $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ при $-2 < x < 3$, $f'(x) < 0$ при $3 < x < 6$;

2) $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = -1$, $f(3) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

907 При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y = x^3 - ax$; 2) $y = ax - \sin x$?

908 При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

909 При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

§ 50 Экстремумы функции



На рисунке 123 изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше ее значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1,5; 2,5)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

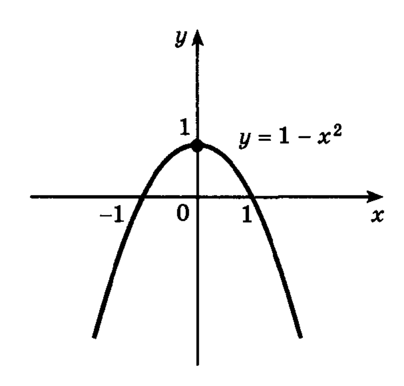


Рис. 124

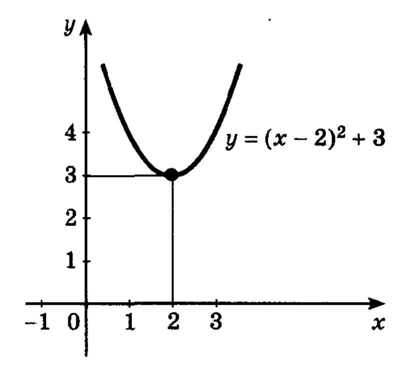


Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).



Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма*[1]. Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 126).

[1] Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик, один из основоположников теории чисел и математического анализа.

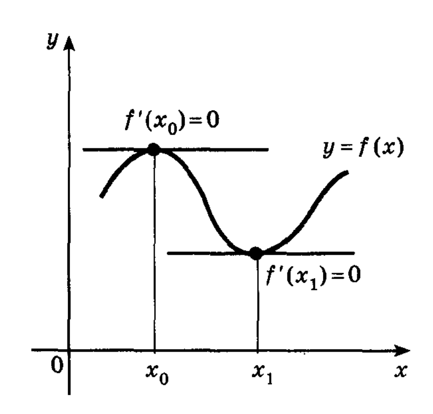


Рис. 126

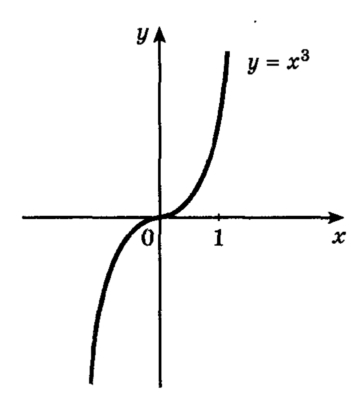


Рис. 127

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 124) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, ее производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. Функция $f(x) = (x-2)^2 + 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 125), $f'(x) = 2(x-2)$, $f'(2) = 0$.

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

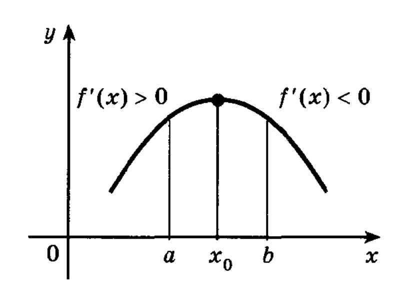
Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 127).

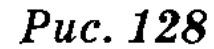
Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*.

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ — точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует (см. § 44). Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют *критическими точками этой функции.*

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Приведем *достаточные условия* того, что стационарная точка является точкой экстремума, т. е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.




Рис. 128

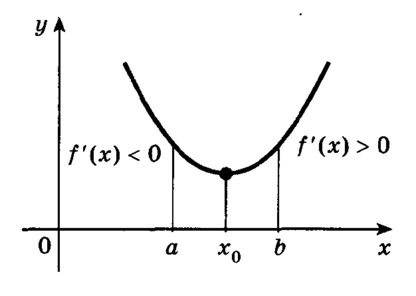


Рис. 129

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться формулой Лагранжа на отрезках $[x; x_0]$, где $a < x < x_0$, и $[x_0; x]$, где $x_0 < x < b$.

Задача 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

▶ Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Найдем стационарные точки:

$$4x^2(x - 3) = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = 3.$$

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «–» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ — точка минимума. ◁

Задача 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значение функции в этих точках.

▶ Производная равна

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «−». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума. Значение функции в точке максимума равно $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. ◁

Упражнения

910 На рисунке 130 изображен график функции $y = f(x)$. Найти точки максимума и минимума этой функции.

911 На рисунке 131 изображен график функции $y = f(x)$. Найти критические точки этой функции.

912 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$; 2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;

3) $y = e^{2x} - 2e^x$; 4) $y = \sin x - \cos x$.

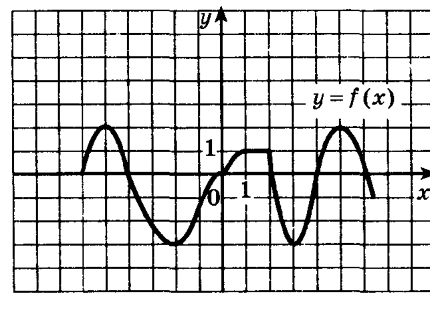


Рис. 130

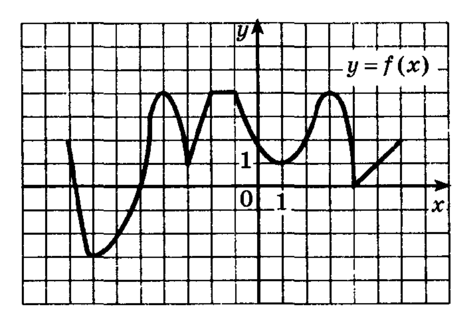


Рис. 131

913 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{2 + x^2}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 + 3}{2x}$; 3) $y = e^{x^2 - 1}$; 4) $y = 2^{x^2 + x}$.

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = 2\cos x + x$.

916 Имеет ли точки экстремума функция:

1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 5x$; 3) $y = x^3 + 2x$; 4) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$?

917 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -1$, $b = 7$, $f(-1) = 0$, $f(7) = -2$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $4 < x < 7$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -5$, $b = 4$, $f(-5) = 1$, $f(4) = -3$, $f'(x) < 0$ при $-5 < x < -1$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f'(-1) = 0$.

918 Найти критические точки функции:

1) $y = \sqrt{2 - 3x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$;

3) $y = |x - 1|$; 4) $y = x^2 - |x| - 2$.

919 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 2) $y = (x - 1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y = x - \sin 2x$; 4) $y = \cos 3x - 3x$.

920 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = \frac{(2 - x)^3}{(3 - x)^2}$; 2) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$; 3) $y = (x - 1)e^{3x}$;

4) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$; 5) $y = e^{\sqrt{3 - x^2}}$; 6) $y = \sqrt{e^x - x}$.

921 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -6$, $b = 6$, $f(-6) = -6$, $f(6) = 1$, $f'(x) > 0$ при $-6 < x < -4$, $-1 < x < 4$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -1$, $4 < x < 6$, $f'(-4) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(4) = 0$;

2) $a = -4$, $b = 5$, $f(-4) = 5$, $f(5) = 1$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -3$, $0 < x < 3$, $f'(x) > 0$ при $-3 < x < 0$, $3 < x < 5$, $f'(-3) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(3) = 0$.

922 Исследовать на экстремум функцию $y = (x + 1)^n e^{-x}$, где n — натуральное число.



§ 51 Применение производной к построению графиков функций

Задача 1 Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

▶ Эта функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$. С помощью производной найдем промежутки монотонности этой функции и ее точки экстремума. Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдем стационарные точки: $3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трехчлен $3x^2 - 4x + 1$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$.

Производная положительна на промежутках $x < \frac{1}{3}$ и $x > 1$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает. Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; ее значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

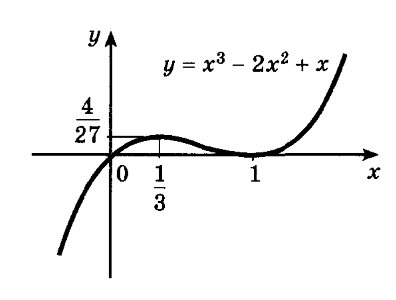


Рис. 132

Знак «↗» означает, что функция возрастает, а знак «↘» означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс:

$x^3 - 2x^2 + x = 0$, $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, $x(x - 1)^2 = 0$, откуда $x = 0$, $x = 1$. Для более точного построения графика найдем значения функции еще в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 2x^2 - x$ (рис. 132). ◁

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью ее производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.



При исследовании свойств функции полезно найти:
1) область ее определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, еще несколько точек графика.

Задача 2 Построить график функции $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$.

▶ 1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x) = -5x - 5x^4 = -5x(1 + x^3)$.

3) Решая уравнение $-x(1 + x^3) = 0$, находим стационарные точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$.

4) Производная положительна на интервале $-1 < x < 0$, следовательно, на этом интервале

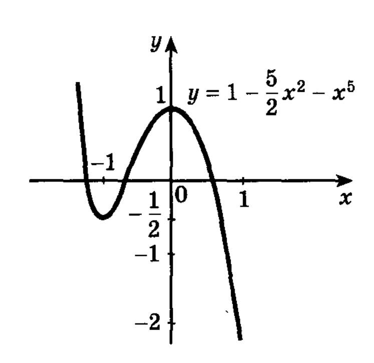


Рис. 133

функция возрастает. На промежутках $x < -1$ и $x > 0$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

5) Стационарная точка $x_1 = -1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+»; $f(-1) = -0{,}5$. Точка $x_2 = 0$ — точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «–»; $f(0) = 1$.

Составим таблицу.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	$-0{,}5$	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ (рис. 133). ◁

График функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ построен с помощью исследования некоторых свойств этой функции. По графику можно выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 133 видно, что уравнение $1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 = 0$ имеет три различных действительных корня.

Для построения графика четной (нечетной) функции достаточно исследовать свойства и построить ее график при $x > 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Задача 3 Построить график функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

▶ 1) Область определения: $x \neq 0$.

2) Данная функция нечетная, так как $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$. Поэтому сначала исследуем эту функцию и построим ее график при $x > 0$.

3) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

4) На промежутке $x > 0$ функция имеет одну стационарную точку $x = 2$.

5) Производная положительна на промежутке $x > 2$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $0 < x < 2$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

6) Точка $x = 2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(2) = 4$.

Составим таблицу.

x	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘	4	↗

Найдем значения функции еще в двух точках: $f(1) = 5$, $f(4) = 5$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$. График этой функции при $x < 0$ строим с помощью симметрии относительно начала координат (рис. 134). ◁

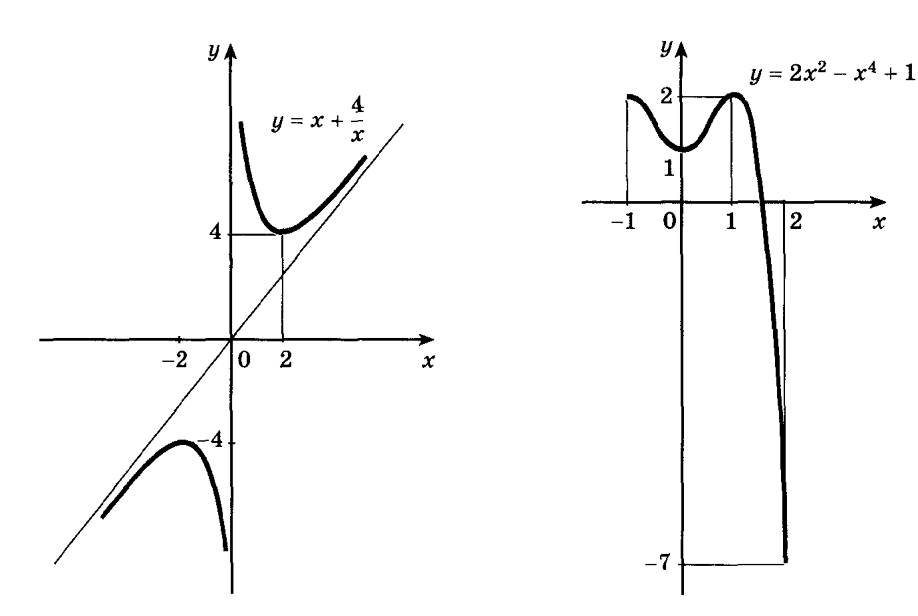


Рис. 134

Рис. 135

Для краткости записи решения задач на построение графиков функций бо́льшую часть рассуждений, предшествующих таблице, можно проводить устно.

В некоторых задачах требуется исследовать функцию не на всей области определения, а только на некотором промежутке.

Задача 4 Построить график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.

▶ Найдем производную

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 + x)(1 - x).$$

Составим таблицу.

x	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2
$f'(x)$	0	—	0	+	0	—	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Используя эту таблицу, строим график функции $y = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$ (рис. 135). ◁

Упражнения

923 Используя график функции $y = f(x)$ (рис. 136), найти:

1) область определения и множество значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) значения x, при которых функция принимает положительные, отрицательные значения;
5) экстремумы функции.

924 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 4$, $f(-2) = -2$, $y = f(x)$ возрастает на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 1$ и $f(x) = x$ при $1 \leqslant x \leqslant 4$;

2) $a = 1$, $b = 7$, $f(7) = 1$, $f(x) = x^2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $y = f(x)$ убывает на промежутке $2 < x \leqslant 7$.

925 На отрезке $[0; 6]$ изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, пользуясь данными, приведенными в таблице. Учесть, что $f(2) = 0$, $f(5) = 0$.

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4	$4 < x < 6$	6
$f'(x)$		+	0	—	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	3

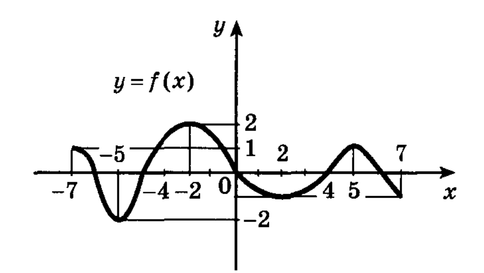


Рис. 136

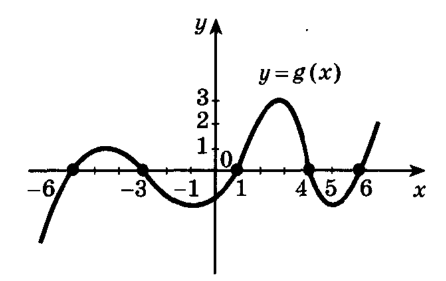


Рис. 137

Построить график функции **(926—927).**

926 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = 2 + 3x - x^3$;
3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

927 1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$; 2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$; 4) $y = 6x^4 - 4x^6$.

928 Построить график функции:
1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 3]$;
2) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ на отрезке $[-3; 3]$.

929 На рисунке 137 изображен график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Используя график, найти точки экстремума функции $y = f(x)$.

Построить график функции **(930—933).**

930 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3$;
3) $y = 4x^5 - 5x^4$; 4) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$.

931 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$; 2) $y = \frac{4}{x} - x$; 3) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

932 1) $y = xe^{-x}$; 2) $y = xe^x$; 3) $y = e^{x^2}$; 4) $y = e^{-x^2}$.

933 1) $y = \frac{x^2}{x-2}$; 2) $y = \frac{-x^2 - 3x - 1}{x}$; 3) $y = \frac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$.

934 Найти число действительных корней уравнения:
1) $x^4 - 4x^3 + 20 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 - 7 = 0$.

935 Построить график функции $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = C$ при различных значениях C?

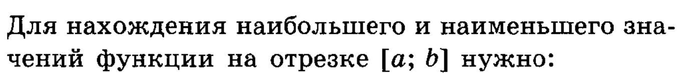
§ 52 Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти *наибольшее* или *наименьшее значение* из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке.*

Рассмотрим, например, график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (рис. 135).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках $x = -1$ и $x = 1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x = 2$. Точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x = 0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить ее значения в точках минимума и на концах отрезка.

Вообще, пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.



Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти ее значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

▶ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}$, $f(2) = 9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$, $3x^4 - 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1$, $f(1) = 4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ◁

Задача 2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке [2; 4].

▶ 1) $f(2) = 2{,}5$, $f(4) = 4{,}25$.

2) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

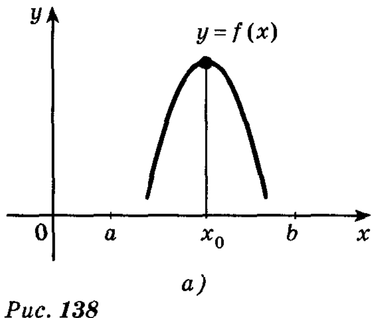
На интервале (2; 4) стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ◁

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

В практических задачах обычно функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационар-



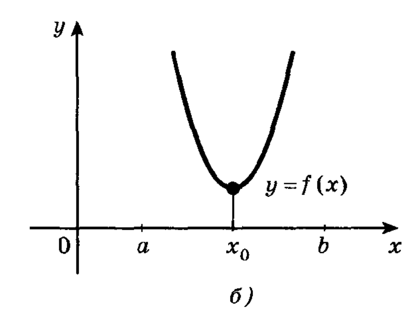


Рис. 138

ную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 138, *а*); а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 138, *б*).

Задача 3 Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

▶ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.

По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x > 0$.

Найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1 = 6$ и $x_2 = -6$. На интервале $x > 0$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак с «–» на «+», и поэтому $x = 6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x > 0$ функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).

Ответ $36 = 6 \cdot 6$. ◁

3*. При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции полезно использовать следующее утверждение:

Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задача 4* Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

▶ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т. е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 139).

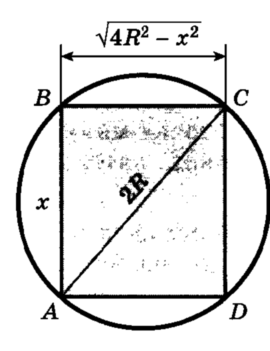


Рис. 139

Обозначим $AB = x$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора находим $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Площадь прямоугольника равна

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \quad \text{где } 0 < x < 2R.$$

Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$. Так как $S(x) > 0$ на интервале $0 < x < 2R$, то функции $S(x)$ и $f(x) = (S(x))^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция

$$f(x) = x^2(4R^2 - x^2) = 4R^2x^2 - x^4$$

принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$. Найдем производную

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(R\sqrt{2} + x)(R\sqrt{2} - x).$$

На интервале $0 < x < 2R$ есть только одна стационарная точка $x = R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$, (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x = R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь равна $2R^2$. ◁

Упражнения

936 Используя график функции (рис. 140), найти ее точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения.

937 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$:

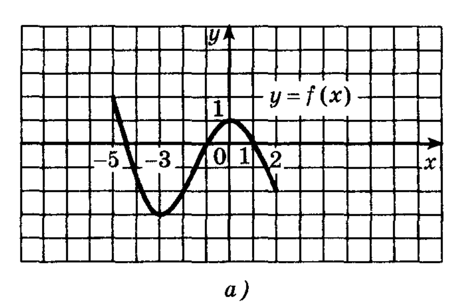
1) на отрезке $[-4; 3]$; 2) на отрезке $[-2; 1]$.

938 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

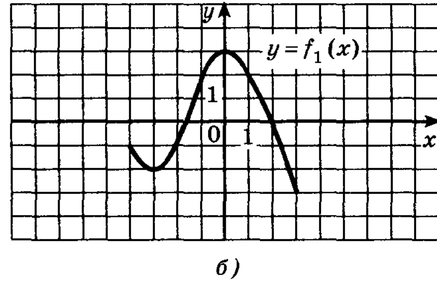
1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$;

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0,5]$;

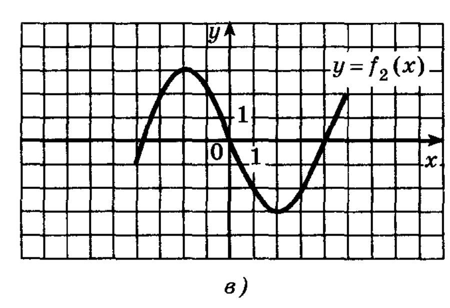
3) $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.



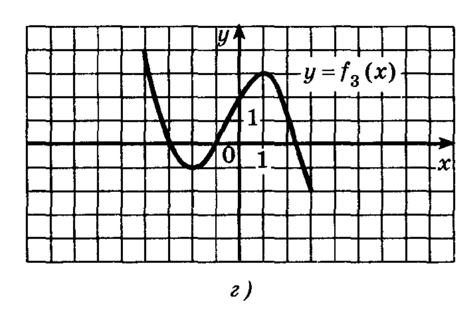
а)



б)



в)



г)

Рис. ***140***

939 Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции:

1) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ на интервале $x > 0$;

2) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ на интервале $x < 0$.

940 Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

941 Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

942 Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

943 Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

944 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \ln x - x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 3\right]$;

2) $f(x) = x + e^x$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

3) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

945 Найти наибольшее значение функции:

1) $3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ на промежутке $x > 0$;

2) $3x - 2x\sqrt{x}$ на промежутке $x > 0$.

946 Найти наименьшее значение функции:

1) $e^{3x} - 3x$ на интервале $(-1; 1)$;

2) $\frac{1}{x} + \ln x$ на интервале $(0; 2)$.

947 Найти наибольшее значение функции:

1) $x\sqrt[4]{5-x}$ на интервале $(0; 5)$;

2) $x\sqrt[3]{4-x}$ на интервале $(0; 4)$;

3) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$;

4) $\sqrt[3]{x^2-4x+5}$ на интервале $(-1; 5)$.

948 Из квадратного листа картона со стороной a нужно сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края (рис. 141). Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

949 Равнобедренные треугольники описаны около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 142). Обозначая $BK = x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

950 Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на оси Ox, а две другие — на параболе $y = 3 - x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.

951 Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке A (2; 0,5).

952 Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

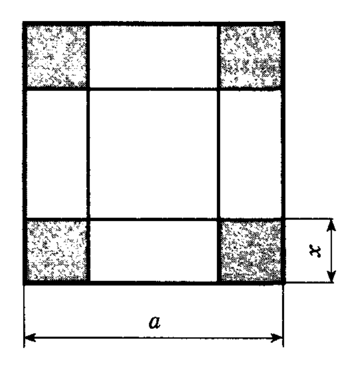


Рис. 141

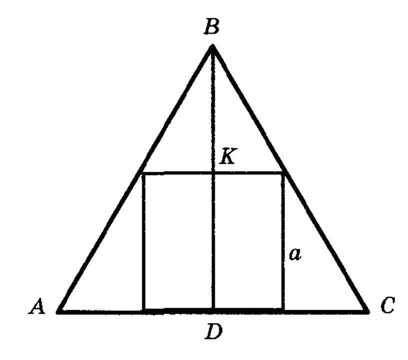


Рис. 142

§ 53* Выпуклость графика функции, точки перегиба

§ 53* Выпуклость графика функции, точки перегиба

1. Производная второго порядка.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Ее производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале. Производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называют также первой *производной* или *производной первого порядка* функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале $(a; b)$, то эту производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* данной функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Например, если $f(x) = x^4 - 3x^2$, то $f'(x) = 4x^3 - 6x$, $f''(x) = 12x^2 - 6$, а если $f(x) = \sin 2x$, то $f'(x) = 2\cos 2x$, $f''(x) = -4\sin 2x$. Производную от второй производной функции $f(x)$ называют *третьей производной* или *производной третьего порядка* этой функции и т. д. В § 49 и 50 было показано, как с помощью первой производной можно находить промежутки возрастания (убывания) функции и точки экстремума. Рассмотрим *свойства функции*, которые устанавливаются *с помощью второй производной*.

2. Выпуклость функции.

На рисунке 143 изображены графики функций, имеющих первую и вторую производные на интервале $(a; b)$.

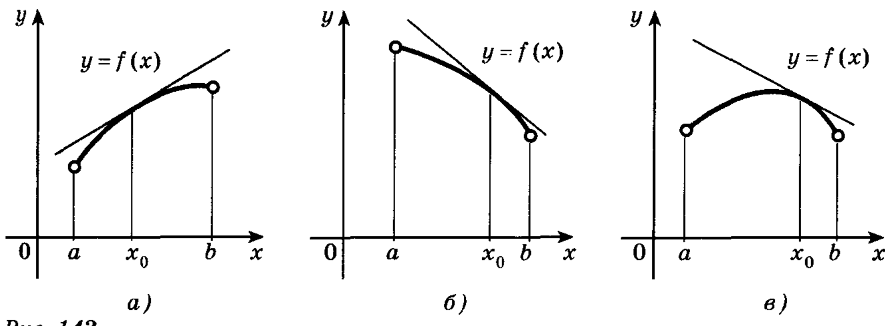


Рис. 143

Выясним, в чем заключается различие в поведении этих функций и какие свойства являются для них общими. На рисунке 143, *а* изображен график возрастающей, а на рисунке 143, *б* убывающей функции; функция, график которой представлен на рисунке 143, *в*, не является монотонной.

Однако все кривые, изображенные на рисунке 143, обладают общим свойством: с возрастанием x от a до b угловой коэффициент касательной к каждой из данных кривых уменьшается, т. е. производная каждой из соответствующих функций убывает на интервале $(a; b)$, и поэтому $f''(x) < 0$.

Из рисунков видно, что для любой точки x_0 интервала $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ *лежит ниже касательной* к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Поэтому функции, графики которых изображены на рисунке 143, называют *выпуклыми вверх*. Дадим теперь определение *выпуклости*. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх на* этом *интервале*, если ее производная $f'(x)$ убывает на $(a; b)$.

Аналогично функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале $(a; b)$, если $f'(x)$ возрастает на этом интервале (рис. 144), и потому $f''(x) > 0$.

Если x_0 — любая точка интервала $(a; b)$, то график функции, выпуклой вниз, при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ (рис. 144) лежит выше *касательной к* этому *графику* в точке $(x_0; f(x_0))$.

Отметим еще, что если функция $y = f(x)$ выпукла вверх, а M_1 и M_2 — точки этого графика (рис. 145), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой, проведенной через точки M_1 и M_2.

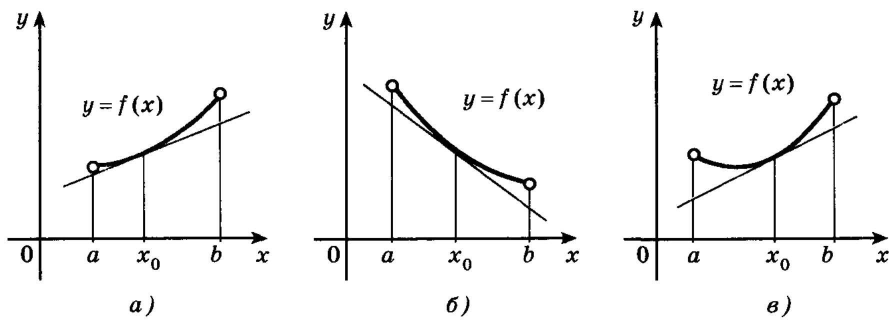


Рис. 144

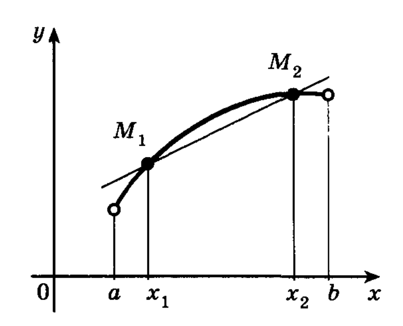


Рис. 145

Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют *интервалами выпуклости* этой функции.

Покажем, как с помощью второй производной можно находить интервалы выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$.

Задача 1 Найти интервалы выпуклости вверх и вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sin x$, $-\pi < x < \pi$.

▶ 1) Если $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $x < 0$ функция x^3 выпукла вверх, а на промежутке $x > 0$ выпукла вниз (рис. 146).

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f''(x) = -\sin x$. Пусть $-\pi < x < 0$, тогда $\sin x < 0$ и $f''(x) > 0$. Следовательно, функция $\sin x$ (рис. 147) выпукла вниз на интервале $(-\pi; 0)$. Аналогично функция $\sin x$ выпукла вверх на интервале $(0; \pi)$, так как $-\sin x < 0$ при $0 < x < \pi$. ◁

Задача 2 Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

▶ Прямая $y = \frac{2}{\pi}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ (см. рис. 147). Так как функция $y = \sin x$ выпукла

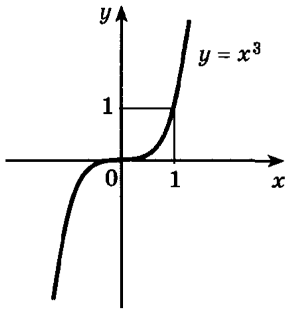


Рис. 146

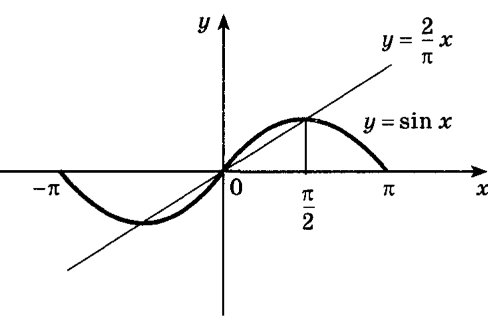


Рис. 147

вверх на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то ее график на этом интервале лежит выше прямой $y = \frac{2}{\pi}x$. Это и означает, что на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◁

3. Точка перегиба.

В задаче 1 были рассмотрены функции x^3 и $\sin x$, для которых точка $x = 0$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз.

Точка x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этой функции, если x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз для $f(x)$.

Иными словами, *в точке перегиба x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.*

Отметим, что при переходе через точку перегиба x_0 функции $f(x)$ график этой функции переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке x_0 на другую сторону.

С помощью второй производной можно находить точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Задача 3 Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = xe^{-x}$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

▶ Найдем первую и вторую производные функции.

1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$,

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ — точка перегиба функции xe^{-x}. Других точек перегиба нет.

2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и 1 (и только в этих точках). Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$. ◁

Упражнения

953 Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 \cos x$;
2) $f(x) = x^3 \sin x$;
3) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$;
4) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6$.

954 Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = (x + 1)^4$;
2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$;
3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^x$;
4) $f(x) = x^3 - 6x \ln x$.

955 Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \cos x$, $-\pi < x < \pi$;
2) $f(x) = x^5 - 80x^2$;
3) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$;
4) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$, $-\pi < x < \pi$.

Упражнения к главе IX

956 Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$;
2) $y = \frac{2}{3} x^3 - x^2 - 4x + 5$;
3) $y = \frac{3}{x} - 1$;
4) $y = \frac{2}{x - 3}$.

957 Найти стационарные точки функции:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$;
2) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;
3) $y = \frac{x}{3} - \frac{12}{x}$;
4) $y = \cos 2x + 2 \cos x$.

958 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$;
2) $y = 3x^4 - 4x^3$.

959 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^5 - 2{,}5x^2 + 3$;
2) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 - 3$.

960 Построить график функции:

1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$;
2) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

961 Построить график функции:

1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0; 3]$;
2) $y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 4]$.

962 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2; 2]$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-4; 0]$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-4; 3]$;

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$.

963 Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

964 Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

965 Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объема.

Проверь себя!

1 **Найти интервалы возрастания и убывания функции**

$$y = 6x - 2x^3.$$

2 **Найти точки экстремума функции** $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

3 **Построить график функции:**

1) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; **2)** $y = x^3 - 3x$.

4 **Найти наибольшее и наименьшее значения функции** $y = x + \frac{4}{x}$ **на отрезке [1; 5].**

5 **Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объем параллелепипеда был наибольшим?**

966 Доказать, что функция $y = 1{,}8x^5 - 2\frac{1}{3}x^3 + 7x + 12{,}5$ возрастает на всей области определения.

967 Доказать, что функция $y = x(1 + 2\sqrt{x})$ возрастает на всей области определения.

968 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x \ln x$; 2) $y = xe^x$; 3) $y = \frac{25}{7 - x} - \frac{9}{3 - x}$.

969 На рисунке 148 изображен график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Найти:

1) интервалы возрастания и убывания функции $y = f(x)$;

2) точки экстремума функции $y = f(x)$;

3)* точки перегиба функции $y = f(x)$.

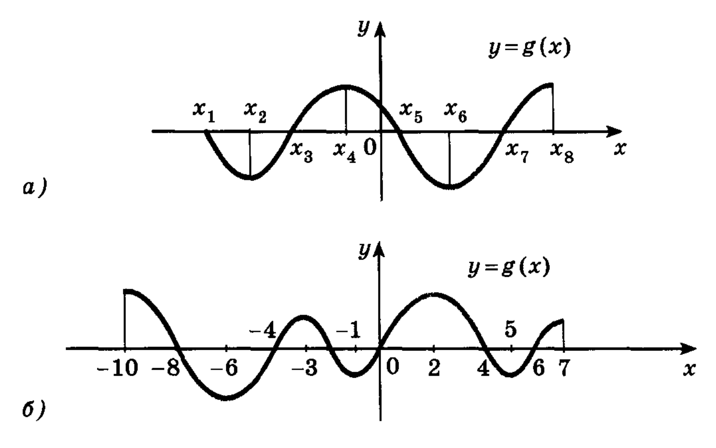


Рис. 148

970 Построить график функции:

1) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{2}{x^2 + 4}$;

3) $y = (x - 1)^2 (x + 2)$; 4) $y = x (x - 1)^3$.

971 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

972 Тело движется по закону $s(t) = 6t^2 - t^3$. Какова наибольшая скорость тела?

973 Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

974 Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 40. Какую длину должны иметь катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

975 Сумма диагоналей параллелограмма равна a. Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

976 Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

977 Найти наибольший из объемов всех пирамид, у каждой из которых высота равна 12, а основанием является прямоугольный треугольник с гипотенузой 4.

978 Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

979 Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объем был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось $\frac{5}{2}$?

980 Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

981 Построить график функции:

1) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$;

2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$;

3) $y = x^2 e^{-x}$;

4) $y = x^3 e^{-x}$.

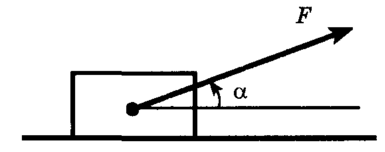


Рис. 149

982 Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 149). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.



Интеграл

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. И. Лобачевский

Первообразная



Рассмотрим движение точки вдоль прямой. Пусть за время t от начала движения точка прошла путь $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти пройденный ею путь $s(t)$, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t) = at$, где a — заданное число, то функция $s(t) = \frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at = v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Задача 1 Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными функции $f(x)=x^2$.

▶ 1) Обозначим $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=$ $=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=x^2=f(x)$.

3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ◁

Вообще, любая функция $\frac{x^3}{3}+C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции ее первообразная определяется неоднозначно.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$. Производная их разности $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x)=F'_1(x)-$ $-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Если $g'(x)=0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y=g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox. Поэтому графиком функции $y=g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox, т. е. $g(x)=C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x)=C$, $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ следует, что $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x)+C$. Графики функций $y=F(x)+C$ получаются из графика $y=F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 150). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

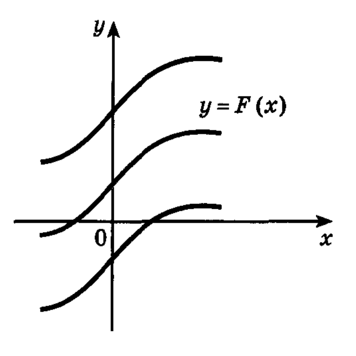


Рис. 150

Задача 2 Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

▶ Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдем число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◁

Задача 3 Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ на промежутке $x > 0$.

▶ Так как $(x^{p+1})' = (p+1) \cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◁

Упражнения

983 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = \frac{x^6}{6}$, $f(x) = x^5$; 2) $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$, $f(x) = x^4$.

984 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ при $x > 0$:

1) $F(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = -\frac{2}{x^2}$; 2) $F(x) = 1 + \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

985 Найти все первообразные функции:

1) x^4; 2) x^3; 3) x^{-3}; 4) $x^{-\frac{1}{2}}$.

986 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = x$, $M(-1; 3)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$.

987 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$; 2) $F(x) = \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$.

§ 55 Правила нахождения первообразных

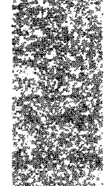
Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от латинского слова *integrare* — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных. Например, зная, что $(\cos x)' = -\sin x$, получаем $(-\cos x)' = \sin x$, откуда следует, что все первообразные функции $\sin x$ записываются в виде $-\cos x + C$, где C — произвольная постоянная.

Приведем таблицу первообразных.

Функция	Первообразная
x^p, $p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p$, $p \neq -1$, $k \neq 0$	$\dfrac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\dfrac{1}{kx+b}$, $k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \ln (kx + b) + C$
$e^{kx + b}$, $k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} e^{kx + b} + C$
$\sin (kx + b)$, $k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k} \cos (kx + b) + C$
$\cos (kx + b)$, $k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \sin (kx + b) + C$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены. Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4>0$, т. е. на промежутке $x>2$. Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведем следующие правила интегрирования:



Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:

1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;

2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1 Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3\cos x.$$

▶ Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$. ◁

Задача 2 Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3).$$

▶ По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$. ◁

Упражнения

Найти одну из первообразных функции (**988—990**).

988 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $6x^2 - 4x + 3$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

989 1) $3\cos x - 4\sin x$; 2) $5\sin x + 2\cos x$;
3) $e^x - 2\cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;
5) $5 - e^{-x} + 3\cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4\cos x$;
7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{\ x}$.

990 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

991 Найти все первообразные функции:
1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;
4) $\sin\left(\frac{x}{4} + 5\right)$; 5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

992 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:
1) $f(x) = 2x + 3$, $M\,(1;\ 2)$; 2) $f(x) = 4x - 1$, $M\,(-1;\ 3)$;
3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right)$; 4) $f(x) = \cos 3x$, $M\,(0;\ 0)$.

Найти одну из первообразных функции (**993—996**).

993 1) $e^{2x} - \cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$;
3) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x\ \ \frac{1}{2}}$;
5) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$; 6) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$.

994 1) $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$; 2) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$;
3) $(1+2x)(x-3)$; 4) $(2x-3)(2+3x)$.

995 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

996 1) $\sin x \cos x$; 2) $\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$.

997 Найти первообразную функции $y = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$, которая при $x = \frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

998 Найти одну из первообразных функции:
1) $\frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $\cos^2 x$; 4) $\sin 3x \cos 5x$.



§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке 151. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей положительные значения, а с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой *криволинейной трапеции*.

Выясним, как можно вычислить площадь S криволинейной трапеции с помощью первообразной функции $f(x)$.

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 152), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x = a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку и поэтому $S(a) = 0$, при $x = b$ имеем $S(b) = S$.

Покажем, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

● Рассмотрим разность $S(x + h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x + h]$ (рис. 153). Если число h мало, то эта площадь приблизительно равна $f(x) \cdot h$, т. е. $S(x + h) - S(x) \approx f(x) \cdot h$.

Следовательно, $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$. При $h \to 0$ левая часть этого приближенного равенства по

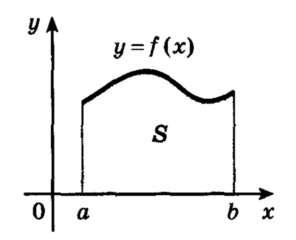


Рис. 151

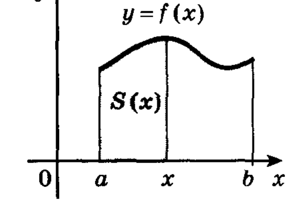


Рис. 152

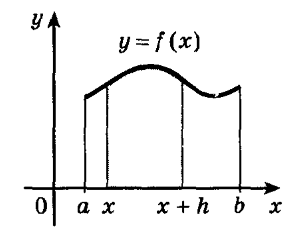


Рис. 153

определению производной стремится к $S'(x)$, а погрешность приближения при $h \to 0$ становится как угодно малой. Поэтому при $h \to 0$ получается равенство $S'(x) = f(x)$. Это означает, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$. ○

Любая другая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ отличается от $S(x)$ на постоянную, т. е.

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Из этого равенства при $x = a$ получаем $F(a) = S(a) + C$. Так как $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ и равенство (1) можно записать так:

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Отсюда при $x = b$ получаем

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

Итак, площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют *интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

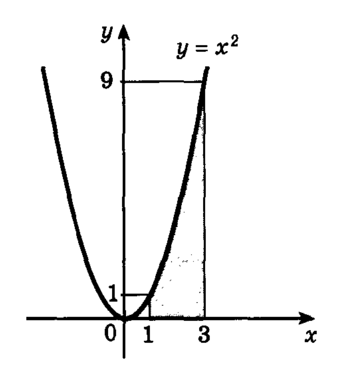


Рис. 154

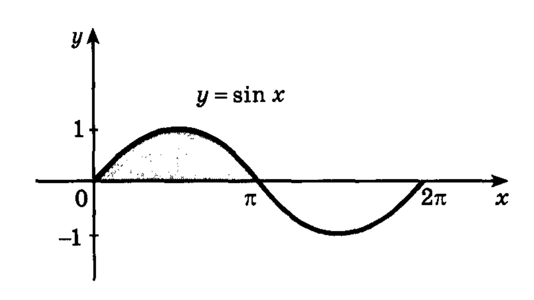


Рис. 155

Задача 1 Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 154.

▶ По формуле (4) находим $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Поэтому $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx =$

$= F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}$ (кв. ед.). ◁

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Задача 2 Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 155.

▶ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формулам (3) и (4) получаем $S = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) =$

$= 1 + 1 = 2$ (кв. ед.). ◁

Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности в связи с вычислением площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, изображенную на рисунке 156. На этом рисунке основание трапеции — отрезок $[a; b]$ — разбито на n отрезков (необязательно равных) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

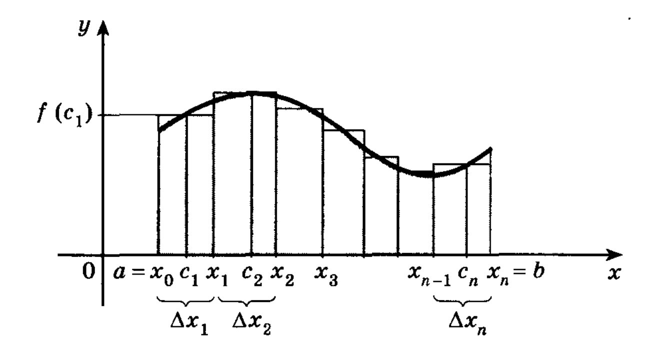


Рис. 156

Через эти точки проведены вертикальные прямые. На первом отрезке $[x_0; x_1]$ выбрана произвольно точка c_1, и далее на этом отрезке построен прямоугольник высотой $f(c_1)$; на втором отрезке $[x_1; x_2]$ выбрана точка c_2, и на этом отрезке построен прямоугольник высотой $f(c_2)$ и т. д. Площадь данной криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n, \quad (5)$$

где Δx_1 — длина первого отрезка, т. е. $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ и т. д. Таким образом, площадь S криволинейной трапеции можно приближенно вычислять по формуле (5), т. е. $S \approx S_n$. Сумму (5) называют *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке* $[a; b]$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю). Если $n \to \infty$ и длины отрезков разбиения стремятся к нулю, то интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу, которое и называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

При этом также справедлива формула Ньютона — Лейбница.

Упражнения

999 Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = (x - 1)^2$, осью Ox и прямой $x = 2$;
2) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью Ox;

3) графиком функции $y = \frac{2}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 4$;

4) графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

1000 Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;

2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;

3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;

4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;

5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;

6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

1001 Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$.

1002 Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 2) $a = 4$, $b = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$.

1003 Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $b = 2$, $f(x) = 5x - x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $b = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$;

3) $b = 1$, $f(x) = e^x - 1$; 4) $b = 2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

 **57**

Вычисление интегралов

Интегралы можно приближенно вычислять с помощью интегральных сумм. Такой способ требует громоздких вычислений. Его применяют в тех случаях, когда не удается найти первообразную функцию $f(x)$ и для вычислений обычно используют ЭВМ, составляя специальные программы. Если же первообразная функция известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона — Лейбница.

Приведем примеры вычисления интегралов по формуле Ньютона — Лейбница с помощью таблицы первообразных и правил интегрирования.

Задача 1 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx$.

▶ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2}-x$. Поэтому $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2}-1\right)-$
$-\left(\frac{0^2}{2}-0\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 2 Вычислить интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \sin x\,dx$.

▶ $\int\limits_{-a}^{a} \sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=(-\cos a)-(-\cos(-a))=$
$=-\cos a+\cos(-a)=0$, так как $\cos(-a)=\cos a$. ◁

Задача 3 Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

▶ $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx=\int\limits_{-1}^{3}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=(2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3}=$
$=(2\cdot3+3)^{\frac{1}{2}}-(2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}}=3-1=2$. ◁

Задача 4 Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

▶ $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}. \ \triangleleft$$

Задача 5 Вычислить интеграл $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

► $$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\,\frac{11}{15}. \ \triangleleft$$

Упражнения

Вычислить интеграл (**1004—1011**).

1004 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1005 1) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

1006 1) $\int_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$; 5) $\int_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.

1007 1) $\int_0^4 (x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_0^2 e^{3x}\,dx$; 4) $\int_1^3 2e^{2x}\,dx$.

1008 1) $\int_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)\,dx$;

3) $\int_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

1009 1) $\int_{1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 2) $\int_{1}^{3} \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\int_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

1010 1) $\int_{1}^{2} \frac{3}{2x-1}\,dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{4}{3x+2}\,dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

1011 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$; 4) $\int_{0}^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x)\,dx$;

5) $\int_{0}^{3} x^2 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_{3}^{4} \frac{x^2-4x+5}{x-2}\,dx$.

1012 Найти все числа $b > 1$, для которых выполняется равенство $\int_{1}^{b} (b-4x)\,dx \geqslant 6-5b$.



§ 58 Вычисление площадей с помощью интегралов

Задача 4 Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$.

▶ Построим график функции $y=9-x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 157).

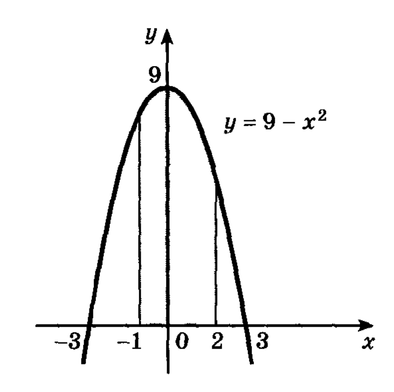


Рис. 157

Рис. 158

Искомая площадь S равна интегралу

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24. \ \triangleleft$$

Задача 2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

▶ Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} (2x - x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2} = 1. \ \triangleleft$$

Задача 3 Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = \cos x$ на этом отрезке.

▶ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

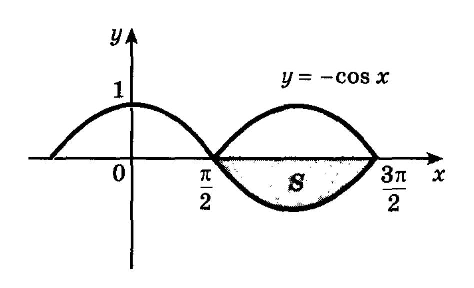


Рис. 159

Рис. 160

ниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = -\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому $S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$

$$= (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2. \ \triangleleft$$

Вообще, если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, причем равенство нулю может быть лишь на его концах (рис. 160), то площадь S криволинейной трапеции равна $S = \int\limits_a^b (-f(x))\,dx$.

Задача 4 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

▶ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как

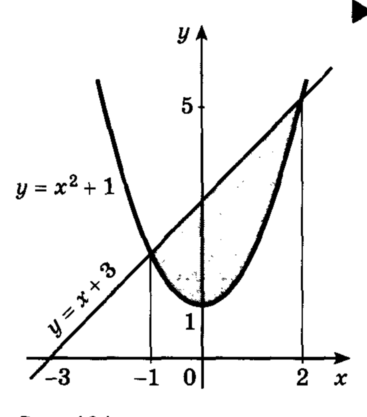


Рис. 161

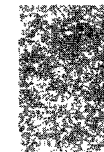
$$S_1 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx, \quad S_2 = \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))\,dx =$$

$$= \int_{1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5. \ \triangleleft$$



Вообще, площадь фигуры, изображенной на рисунке 162, равна

$$S = \int_{a}^{b}(f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию $f_2(x) \geqslant f_1(x)$.

Задача 5 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

▶ Построим данную фигуру (рис. 163) и найдем абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2 = 2x^2 - 1$.

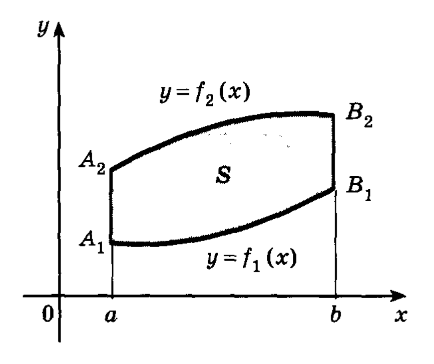


Рис. 162

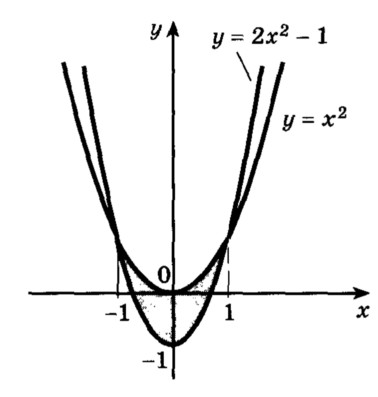


Рис. 163

Это уравнение имеет корни $x_{1,2} = \pm 1$. Воспользуемся формулой (1). Здесь $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$.

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \ \triangleleft$$

Упражнения

1013 На рисунке 164 изображены криволинейные трапеции. Найти площадь каждой из них.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями **(1014—1023)**.

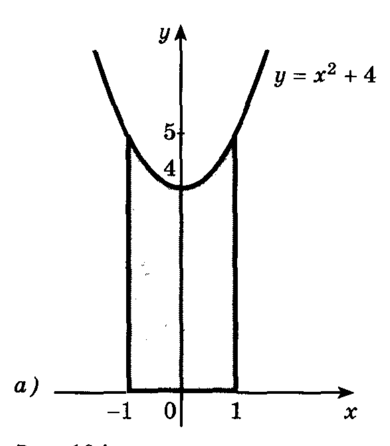
1014 1) Параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;
3) параболой $y = 4x - x^2$, прямой $y = 4 - x$ и осью Ox;
4) параболой $y = 3x^2$, прямой $y = 1{,}5x + 4{,}5$ и осью Ox.

1015 1) Графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

1016 1) Параболой $y = x^2 + 3x$ и осью Ox;
2) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox.

1017 1) Параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$;
2) параболой $y = (x + 2)^2$ и прямой $y = x + 2$;
3) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$.

1018 1) Параболами $y = 6x^2$, $y = (x - 3)(x - 4)$ и осью Ox;
2) параболами $y = 4 - x^2$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox.



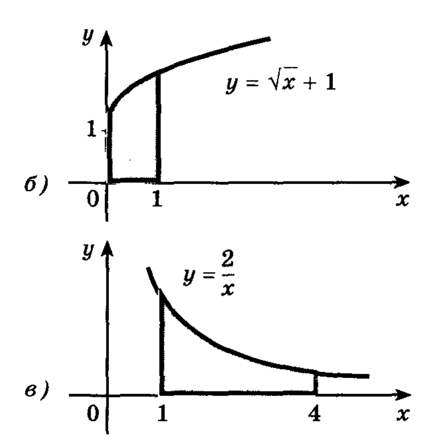


Рис. 164

1019 1) Графиком функции $y = \sin x$, отрезком $[0; \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

2) графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

1020 1) Параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$;
2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$.

1021 1) Параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = -x$;
2) прямой $y = 1$, осью Oy и графиком функции $y = \sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1022 1) Параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;
2) параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;
3) параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;
4) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$, $x = -2$.

1023 1) Параболой $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведенными из точки $(0; 1)$;
2) гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямой $x = 1$ и касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

1024 Фигура ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Найти точку $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2 + 1$, через которую надо провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.



§ 59* Применение производной и интеграла к решению практических задач

1. Простейшие дифференциальные уравнения. До сих пор рассматривались уравнения, в которых неизвестными являлись числа. В математике и ее приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ нужно решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$. Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями.*

Задача 1 Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

▶ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т. е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, где C — произвольная постоянная. ◁

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется.

Задача 2 Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $\sin 0 + C = 2$, откуда $C = 2$.

Ответ $y = 2 + \sin x$. ◁

Решение многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \qquad (1)$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \qquad (2)$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость $m'(t)$ размножения бактерий связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, из условия, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса равна m_0, то $C = m_0$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества. Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $k = \frac{\ln 2}{T}$. Поэтому формула (3) запишется так:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания.

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

где ω — заданное положительное число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$. Решениями уравнения (4) являются функции

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \qquad (5)$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.

Графиком гармонического колебания является синусоида.

3. Примеры применения первообразной и интеграла.

Задача 3 Цилиндрический бак, высота которого равна 5 м, а радиус основания равен 0,8 м, заполнен водой (рис. 165). За какое время вытечет вода из бака через круглое отверстие в дне бака, если радиус отверстия равен 0,1 м?

▶ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах).

Скорость вытекания жидкости v зависит от высоты столба жидкости x и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \qquad (6)$$

где $g = 9{,}8$, σ — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды $\sigma = 0{,}6$. Поэтому по мере убывания воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не постоянна).

Пусть $t(x)$ — время, за которое вытекает вода из бака высотой x с тем же радиусом основания R и с тем же отверстием радиуса r (рис. 165). Найдем приближенно разностное отношение $\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$, считая, что за время $t_1 = t(x+h) - t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6). За время t_1 объем воды, вытекшей из бака, равен объему цилиндра высотой h с радиусом основания R (рис. 165), т. е. равен $\pi R^2 h$. С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время t_1, т. е. объем равен $\pi r^2 v t_1$. Таким обра-

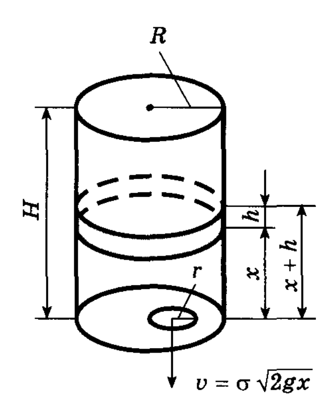


Рис. 165

зом, $\pi R^2 h = \pi r^2 v t_1$. Отсюда, учитывая формулу (6) и обозначение $t_1 = t(x+h) - t(x)$, получаем

$$\frac{t(x+h)-t(x)}{h} \approx \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

причем погрешность приближения стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, при $h \to 0$ получается равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

откуда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x = 0$ (в баке нет воды), то $t(0) = 0$, поэтому $C = 0$. При $x = H$ находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2 \sqrt{2H}}{r^2 \sigma \sqrt{g}}.$$

Используя данные задачи, вычисляем

$$t(5) = \frac{(0{,}8)^2 \cdot \sqrt{10}}{(0{,}1)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \approx 108.$$

Ответ 108 с. ◁

Задача 4 Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

▶ По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в м), k — постоянная. Из условия задачи находим k. Так как при $x = 0{,}01$ м сила $F = 10$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 1000$.

Следовательно, $F(x) = kx = 1000x$.

Работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна $A = \int_a^b F(x)dx$.

Используя данные задачи, получаем

$$A = \int_0^{0{,}08} 1000x\,dx = 1000 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}08} = 3{,}2 \text{ (Дж)}. \ ◁$$

Упражнения

1025 Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$;
2) $v(t) = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

1026 Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t) = 4t - t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

1027 Решить дифференциальное уравнение:

1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$;
3) $y' = 3e^{2x}$; 4) $y' = 4 \cos 2x$;
5) $y' = 3 \sin x$; 6) $y' = \cos x - \sin x$.

1028 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$;
2) $y' = 2 \cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$;
4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$;
6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

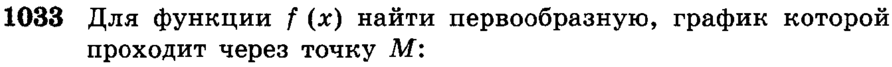
1029 Показать, что функция $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

1030 Масса радия, равная 1 г, через 10 лет уменьшилась до 0,999 г. Через сколько лет масса радия уменьшится до 0,5 г?

1031 Вычислить работу, которую нужно затратить при сжатии пружины на 3 см, если сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см.

1032 Вычислить работу, которую нужно затратить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см.

Упражнения к главе X



1033 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \cos x$, $M(0; -2)$;
2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi; 0)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 5)$;
4) $f(x) = e^x$, $M(0; 2)$;
5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1; -2)$;
6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2; 3)$.

1034 Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{2} 2\,dx$;
2) $\int\limits_{-2}^{2} (3-x)\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{3} (x^2-2x)\,dx$;
4) $\int\limits_{-1}^{1} (2x-3x^2)\,dx$;
5) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;
6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$;
7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

1035 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
2) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
3) $y = x^2$, $y = 2 - x$;
4) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Проверь себя!

1 **Показать, что функция $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ на всей числовой прямой.**

2 **Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$.**

3 **Вычислить:**

1) $\int\limits_{1}^{2} 3x^3\,dx$;
2) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2}$;
3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
4) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$.

4 **Найти площадь фигуры, ограниченной:**

1) параболой $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = 10$.

Вычислить интеграл (**1036—1037**).

1036 1) $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3)\,dx$; 2) $\int_{-1}^2 (6x^3 - 5x)\,dx$;

3) $\int_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx$; 4) $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx$;

5) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

1037 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$; 4) $\int_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (**1038—1039**).

1038 1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$;

4) $y = x^2 + 2$, $y = 2x + 2$.

1039 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 + 4x + 4$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$;

3) $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

1040 Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x = 1$;

2) гиперболой $y = \frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x = 2$, и прямыми $y = 0$, $x = 6$.

1041 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x = 0$, $y = 6$, $x < 0$;

2) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

1042 При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + px$, где p — заданное число, и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа

Умение решать задачи — практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь...

Д. Пойа

1. Числа и алгебраические преобразования

1043 Найти 2,5% от 3,2.

1044 Найти число, если 42% его составляют 12,6.

1045 Какой процент составляет 1,3 от 39?

1046 Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65?

1047 Найти число, 175% которого составляют 78,75.

1048 Найти 180% от 7,5.

1049 Цена товара была снижена сначала на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

1050 В сплаве содержится 18 кг цинка, 6 кг олова и 36 кг меди. Каково процентное содержание составных частей сплава?

1051 Стоимость товара и перевозки составляет 3942 р., причем расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без учета стоимости его перевозки?

1052 Высота пирамиды равна 5 см, а площадь ее основания равна 4 $см^2$. На сколько процентов увеличится объем этой пирамиды, если и площадь ее основания, и высоту увеличить на 10%?

1053 При делении некоторого числа на 72 получится остаток, равный 68. Каким будет остаток, если это же число разделить на 12?

1054 Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

1055 По вкладу, вносимому на срок не менее года, сбербанк выплачивает 3% годовых. Вкладчик внес в сбербанк вклад в размере 600 р. Какую сумму денег он получит в конце второго года со дня вклада? в конце третьего года со дня вклада?

1056 По обычному вкладу сбербанк выплачивает 2% годовых. Вкладчик внес 500 р., а через месяц снял со счета 100 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 100 р.?

Вычислить **(1057—1058).**

1057 1) $23{,}276 : 2{,}3 - 3{,}6 \cdot (17{,}2 \cdot 0{,}125 + 0{,}005 : 0{,}1) + 6{,}25 \cdot 3{,}2$;

2) $9{,}25 \cdot 1{,}04 - (6{,}372 : 0{,}6 + 1{,}125 \cdot 0{,}8) : 1{,}2 + 0{,}16 \cdot 6{,}25$.

1058 1) $\dfrac{\left(28 : 1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{4} + 14 : 1\frac{1}{2}\right) \cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2} - 9\frac{3}{4}}$;

2) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 0{,}108)$.

1059 Найти неизвестный член пропорции:

1) $10 : \frac{1}{8} = x : 1\frac{1}{4}$; 2) $x : 0{,}75 = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4}$; 3) $\frac{x}{15} = \frac{1{,}456}{1{,}05}$.

Вычислить **(1060—1064).**

1060 $\left(\dfrac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5}$.

1061 1) $\log_{27} 729$; 2) $\log_9 729$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 729$.

1062 1) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64}$; 2) $\log_8 \log_4 \log_2 16$.

1063 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3}$.

1064 1) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36}$; 2) $16^{0{,}5 \log_4 10 + 1}$.

1065 Сравнить числа:

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ и $2{,}5^{0{,}5}$; 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ и $0{,}2^{\frac{3}{4}}$;

3) $\log_{3,1}\sqrt{10}$ и $\log_{3,1}3$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}$ и $\log_{0,3}\frac{3}{4}$.

1066 Какому из промежутков $0 < a < 1$ или $a > 1$ принадлежит число a, если:

1) $a^{0,2} > 1$; 2) $a^{-1,3} > 1$; 3) $a^{-3,1} < 1$;

4) $a^{2,7} < 1$; 5) $\log_a 0{,}2 > 0$; 6) $\log_a 1{,}3 > 0$?

1067 Какое из чисел больше:

1) $\sqrt{18}$ или $4^{\log_2 3 - \log_4 \frac{5}{11}}$; 2) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$?

1068 Между какими целыми числами заключено число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_2 10$?

Упростить **(1069—1070)**.

1069 1) $3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

1070 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}$; 2) $\sqrt{b^2(4b^4+4b^2+1)}$.

1071 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

1072 Освободиться от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

1073 Записать в виде обыкновенной дроби число:

1) 0,(4); 2) 2,(7); 3) 0,(21);

4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

1074 Записать в виде десятичной периодической дроби число:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

1075 Может ли быть рациональным числом:

1) сумма двух положительных иррациональных чисел;

2) произведение двух иррациональных чисел;

3) частное от деления суммы двух неравных иррациональных положительных чисел на их произведение?

1076 Доказать, что если a и b — натуральные числа и $\sqrt{ab}$ — рациональное число, то $\sqrt{\frac{a}{b}}$ также рациональное число, а если $\sqrt{ab}$ — иррациональное число, то и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — иррациональное число.

1077 Пусть a — рациональное число, b — иррациональное число, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Доказать, что $a + b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ — иррациональные числа.

1078 Имеют ли общие точки промежутки:

1) $[1;\ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3} + 4;\ 15]$;

2) $(0;\ \sqrt{27} + \sqrt{6})$ и $(\sqrt{48} - 1;\ 10)$;

3) $[2;\ 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}]$ и $(3\sqrt{2} + \sqrt{22};\ 11)$;

4) $[1;\ 1 + \sqrt{3}]$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1};\ 4\right)$?

1079 Пусть $0 < a < b$. Доказать, что на числовой оси:

1) точка $\frac{a + b}{2}$ — середина отрезка $[a;\ b]$;

2) точка $\frac{a + bc}{1 + c}$, где $c > 0$, лежит внутри отрезка $[a;\ b]$.

·1080 1) Вычислить диаметр x круга, вписанного в равносторонний треугольник (рис. 166), если $a = 6$ см.

2) Вычислить угол α заготовки, изображенной на рисунке 167, если $a = 4$ см.

1081 Вычислить ширину l ущелья по данным, указанным на рисунке 168.

1082 Вычислить длину моста по данным, указанным на рисунке 169.

1083 Найти числовые значения всех остальных тригонометрических функций по данному значению одной из них $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos \alpha = 0{,}8$; 2) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}4$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$.

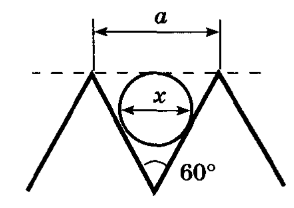


Рис. 166

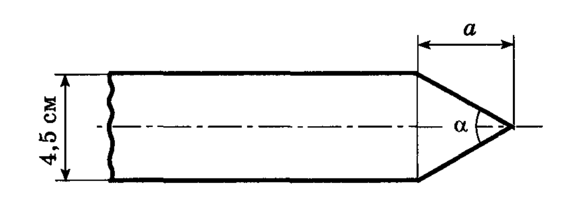


Рис. 167

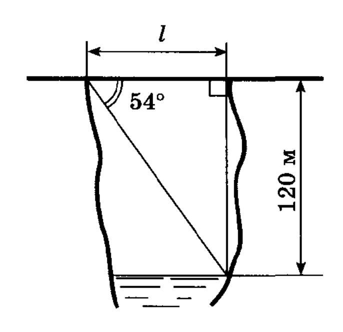


Рис. 168

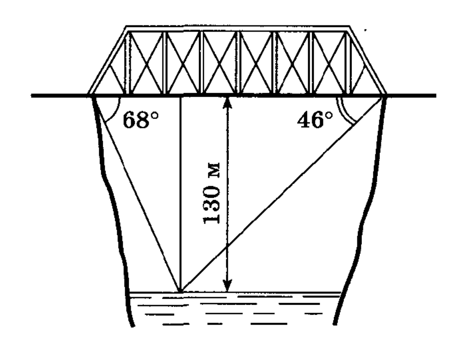


Рис. 169

1084 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

1085 Найти значение выражения $\sin\frac{11\pi}{3} + \cos 690° - \cos\frac{19\pi}{3}$.

Вычислить **(1086—1091)**.

1086 1) $2\ \mathrm{arctg}\ 1 - 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\ \mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

1087 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\ (2\ \mathrm{arctg}\ 3)$.

1088 1) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\log_{10} \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; 3) $\log_8 \sin\frac{3}{4}\pi$;

4) $\log_2 \cos\frac{1}{3}\pi$; 5) $\log_3 1 - \log_4 \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log_5 \cos 0$.

1089 1) $\mathrm{ctg}\ (\mathrm{arctg}\sqrt{3})$; 2) $\mathrm{ctg}\ (\mathrm{arctg}\ 1)$; 3) $\sin\ (\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}))$;

4) $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\cos\ (\mathrm{arctg}\ 1)$; 6) $\cos\ (\mathrm{arctg}\ (-\sqrt{3}))$.

1090 1) $\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\sin\ (5\arccos 0)$.

1091 1) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ при $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$;

2) $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Упростить выражение **(1092—1094)**.

1092 1) $\frac{a+2}{a-2}\cdot\left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6} : \frac{2a-3}{a-2}\right)$; 2) $\left(2-\frac{1}{b}\right) : \frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\frac{2b+1}{b}$.

1093 1) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

2) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}$.

1094 1) $\frac{1}{4+4\sqrt{a}}-\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{4-4\sqrt{a}}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

1095 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5,\ x=4$;

2) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3,\ x=\sqrt{5}$.

Упростить выражение (1096—1103).

1096 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$; 2) $\frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

1097 1) $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$.

1098 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}$.

1099 $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

1100 1) $\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}$.

1101 $\left(\frac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$.

1102 $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\dfrac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^2+18b+81)^{0,5}$.

1103 1) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

1104 Доказать тождество $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

Упростить выражение **(1105—1106)**.

1105 1) $\sin^2(\alpha+8\pi)+\cos^2(\alpha+10\pi)$;

2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)$.

1106 $\dfrac{\sin 2\alpha}{2(1-2\cos^2\alpha)}+\dfrac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}$.

1107 Доказать тождество $\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}-\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=-\sin x-\cos x$.

1108 Разложить на множители:

1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha$;

3) $3-4\sin^2\alpha$; 4) $1-4\cos^2\alpha$.

1109 Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

1110 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha=2$. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$.

1111 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=3$. Найти $\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

Упростить выражение **(1112—1117)**.

1112 1) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

1113 1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.

1114 1) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

1115 1) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

1116 1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 4) $\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

1117 1) $\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin(2{,}5\pi+\alpha)}$; 2) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha)-\cos(2{,}5\pi+\alpha)}$.

1118 Доказать тождество:

1) $\frac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=2$; 2) $\frac{\sin^2(\alpha+90^\circ)}{1+\sin(-\alpha)}=1+\cos(\alpha-90^\circ)$.

Упростить выражение (**1119—1124**).

1119 $\frac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)}-\frac{\sin 2x-8\sin^2 x}{\cos 2x}$.

1120 $\sin(x-2\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

1121 1) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

2) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

1122 1) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\sin\alpha}$; 2) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

1123 1) $\frac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$.

1124 1) $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$; 2) $\frac{1-\cos x+\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x+\cos x}$.

1125 Вычислить $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$.

1126 Упростить выражение и найти его числовое значение при данном значении α: $\frac{2-3\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, $\alpha=-\frac{\pi}{8}$.

Доказать тождество (**1127—1135**).

1127 $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

1128 1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1129 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

1130 1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

1131 $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

1132 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

1133 $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

1134 1) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=1+\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

1135 1) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$;

2) $\cos 3x\cos 6x\cos 12x=\dfrac{\sin 24x}{8\sin 3x}$.

2. Уравнения

1136 Решить уравнение:

1) $\dfrac{3x-16}{12}+1=\dfrac{x+6}{4}-\dfrac{x+3}{6}$;

2) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\dfrac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$.

1137 При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

1138 При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1?

Решить уравнение (**1139—1150**).

1139 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9=x(x+4)-(x+5)(x+2)$;

2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$.

1140 1) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{4}{x^2-9}$; 2) $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{11}{x^2-6x+8}$.

1141 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x$; 2) $a^2x=a+b+b^2x$.

1142 1) $x^2-2x-15=0$; 2) $3x^2+4x-4=0$.

1143 1) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; 2) $x^2-\dfrac{11x}{6}+\dfrac{1}{2}=0$.

1144 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$; 2) $\frac{3x^2}{3x-1}-2=\frac{2x+1}{3x+1}$.

1145 1) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{7}{2+x}=\frac{7x^2-28}{x^2-4}+\frac{18}{2-x}$; 2) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2-x}{3-x}$.

1146 $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$.

1147 1) $x-4+\frac{1}{x}=0$; 2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

1148 1) $x^4-11x^2+30=0$; 2) $2x^4-5x^2+2=0$.

1149 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$; 2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$.

1150 1) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$; 2) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

1151 При каком условии трехчлен ax^2+bx+c является квадратом двучлена?

1152 Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ есть взаимно обратные числа, если $a \neq 0$.

Решить уравнение **(1153—1154)**.

1153 1) $|2x-3|=7$; 2) $|x+6|=2x$; 3) $2x-7=|x-4|$.

1154 1) $|6-2x|=3x+1$; 2) $2|x-2|=|x|-1$.

1155 Найти наименьший корень уравнения $|x^2-3x-6|=2x$.

1156 Найти наибольший рациональный корень уравнения

$$|x^2-8x+5|=2x.$$

Решить уравнение **(1157—1173)**.

1157 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$; 2) $x=2-\sqrt{2x-5}$.

1158 1) $3^{x-7}=81$; 2) $2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x=2^{2x+6}$.

1159 1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$; 2) $2^{x+4}-2^x=120$.

1160 1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$; 2) $0{,}2^{x^2}\cdot 5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$.

1161 1) $2{,}4^{3-2x}=2{,}4^{3x-2}$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$.

1162 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$; 2) $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=216$.

1163 1) $5^{x-1}+5^x+5^{x+1}=155$;
2) $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$;
3) $7^x-7^{x-1}=6$; 4) $3^{x-2}+3^x=10$.

1164 1) $3^{2x}-3^x=72$; 2) $4^x-2^{x+1}=48$.

1165 1) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$; 2) $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$.

1166 1) $\ln\frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$; 2) $\log_3\sqrt{3x-6} - \log_3\sqrt{x-3} = 1$.

1167 1) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$; 2) $2\lg x = -\lg\frac{1}{6-x^2}$.

1168 1) $\log_2(2x-18) + \log_2(x-9) = 5$;
2) $\lg(x^2+19) - \lg(x+1) = 1$.

1169 1) $5^{\log_3 x^2} - 6\cdot 5^{\log_3 x} + 5 = 0$; 2) $25^{\log_3 x} - 4\cdot 5^{\log_3 x+1} = 125$.

1170 1) $x^{\lg x} = 10$; 2) $x^{\log_3 x} = 9x$;
3) $x^{\lg x} - 1 = 10(1 - x^{-\lg x})$; 4) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

1171 1) $7\cdot 4^{x^2} - 9\cdot 14^{x^2} + 2\cdot 49^{x^2} = 0$;
2) $5^{x+4} + 3\cdot 4^{x+3} = 4^{x+4} + 4\cdot 5^{x+3}$.

1172 1) $\log_4(2-\sqrt{x+3}) = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x} = -\frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{2}\log_3(x+1) = \log_3\sqrt{x+4} - 2\log_3\sqrt{2}$.

1173 1) $x^{1+\lg x} = 10x$; 2) $x^{\lg x} = 100x$;
3) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;
4) $\log_2(3+2^x) + \log_2(5-2^x) = 4$.

1174 Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n) = k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k — действительные числа?

1175 Решить уравнение (z — комплексное число):
1) $z^2 + 4z + 19 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

1176 Решить графически уравнение:
1) $0{,}5^x = 2x - 1$; 2) $2^x = 3 - x^2$; 3) $\log_3 x = 4 - x$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$; 5) $2^x = \log_{0,5} x$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$.

1177 Используя графики синуса или косинуса, найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$:
1) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решить уравнение **(1178—1200)**.

1178 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$.

1179 1) $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$; 2) $3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$.

1180 1) $(3 - 4\sin x)(3 + 4\cos x) = 0$;
2) $(\mathrm{tg}\,x + 3)(\mathrm{tg}\,x + 1) = 0$.

1181 1) $\sin 2x = 3 \sin x \cos^2 x$; 2) $\sin 4x = \sin 2x$, 3) $\cos 2x + \cos^2 x = 0$; 4) $\sin 2x = \cos^2 x$.

1182 1) $\sin 2x = 3 \cos x$; 2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$; 3) $2 \cos^2 x = 1 + 4 \sin 2x$; 4) $2 \cos x + \cos 2x = 2 \sin x$.

1183 1) $\cos x + \cos 2x = 0$; 2) $\cos x - \cos 5x = 0$; 3) $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x$; 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

1184 1) $2 \cos x + \sin x = 0$; 2) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

1185 1) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 2$; 2) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

1186 1) $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$; 2) $6 \sin x + 5 \cos x = 6$.

1187 1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0$;
2) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$.

1188 1) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$;
2) $2 \cos 2x = \sqrt{6} (\cos x - \sin x)$.

1189 $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x$.

1190 1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$; 2) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
3) $8 \sin x \cos 2x \cos x = \sqrt{3}$;
4) $4 \sin x \cos x \cos 2x = \cos 4x$.

1191 1) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = \cos 2x$;
2) $2 \sin^2 x - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x$.

1192 1) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \cos 2x$;
2) $2 + \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = \sin^2 x$.

1193 1) $4 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = 3$;
2) $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$.

1194 1) $\sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 6x + \cos 2x = 0$; 3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$; 4) $\sin x = \cos 5x$.

1195 1) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 7x - \cos 3x = 3 \sin 5x$.

1196 1) $\cos x \sin 9x = \cos 3x \sin 7x$;
2) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$.

1197 1) $5 + \sin 2x = 5 (\sin x + \cos x)$;
2) $2 + 2 \cos x = 3 \sin x \cos x + 2 \sin x$.

1198 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

1199 1) $\operatorname{tg}^2 3x - 4 \sin^2 3x = 0$; 2) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$;
3) $\operatorname{ctg} x \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} \right) = 1$; 4) $4 \operatorname{ctg}^2 x = 5 - \frac{9}{\sin x}$.

1200 1) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x = 2 \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$; 4) $\operatorname{tg}(2x+1)\operatorname{ctg}(x+1)=1$.

1201 Решить графически уравнение:

1) $\cos x = 3x - 1$; 2) $\sin x = 0{,}5x^3$;

3) $\cos x = \sqrt{x}$; 4) $\cos x = x^2$.

3. Неравенства

Решить неравенство (1202—1203).

1202 1) $x + 8 > 4 - 3x$; 2) $3x + 1 - 2(3 + x) < 4x + 1$.

1203 1) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}<2$; 2) $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}\geqslant 2$.

1204 При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{5x-4}{7x+5}$; 2) $\frac{3x+10}{40-x}$; 3) $\frac{x+2}{5-4x}$; 4) $\frac{8-x}{6+3x}$?

1205 При каких значениях x отрицательна дробь:

1) $\frac{3-2x}{3x-2}$; 2) $\frac{10-4x}{9x+2}$; 3) $\frac{18-7x}{-4x^2-1}$?

Решить неравенство (1206—1209).

1206 1) $\frac{5x+4}{x-3}<4$; 2) $\frac{2}{x-4}<1$; 3) $\frac{2}{x+3}\leqslant 4$.

1207 1) $8x^2 - 2x - 1 < 0$; 2) $5x^2 + 7x \leqslant 0$.

1208 1) $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0$; 2) $(2x^2 - 3)(x + 4)^3 > 0$.

1209 1) $\frac{3x-15}{x^2+5x-14}\geqslant 0$; 2) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; 3) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3}>0$.

1210 При каких значениях x выражение $\lg(x^2 + 8x + 15)$ не имеет смысла?

1211 При каком наименьшем целом значении m уравнение

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$$

имеет два различных действительных корня?

1212 При каких целых значениях m уравнение

$$(m - 7)x^2 + 2(m - 7)x + 3 = 0$$

не имеет действительных корней?

1213 При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$ принимает отрицательное значение?

1214 При каком наименьшем целом значении x выражение $\frac{x^2 - x - 6}{-7 - x^2}$ принимает положительное значение?

Решить неравенство (**1215—1230**).

1215 1) $|2x - 3| < x$; 2) $|4 - x| > x$;
3) $|x^2 - 7x + 12| \leqslant 6$; 4) $|x^2 - 3x - 4| > 6$;
5) $|2x^2 - x - 1| \geqslant 5$; 6) $|3x^2 - x - 4| < 2$.

1216 1) $2{,}5^{1-x} > 2{,}5^{-3x}$; 2) $0{,}13^{x-4} \geqslant 0{,}13^{2-x}$;
3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$; 4) $3^{-4x} > \sqrt{3}$.

1217 1) $2^{-x+5} < \frac{1}{4}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$;

1218 1) $5^{x^2+3x+1,5} < 5\sqrt{5}$; 2) $0{,}2^{x^2-6x+7} \geqslant 1$.

1219 1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt[3]{3}$; 2) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 10$.

1220 1) $2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2}{3}x} \cdot 2^{-4} > 52$;
2) $2^{x+2} - 2^{x+3} + 5^{x-2} > 5^{x+1} + 2^{x+4}$.

1221 1) $3{,}3^{x^2+6x} < 1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2} > \frac{1}{2}$; 3) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$;
4) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$;
5) $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2\quad 3x} + 6 \geqslant 0$.

1222 1) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_2 (x^2-4x+3,5)} > \frac{1}{5}$.

1223 1) $\log_6 (2 - x) < \log_6 (2x + 5)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2) \geqslant -1$.

1224 1) $\sqrt{\lg x} < \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} (2x + 6) + 2$.

1225 1) $\log_{0,5} (1 + 2x) > -1$; 2) $\log_3 (1 - 2x) < -1$.

1226 1) $\log_{0,5} (x^2 - 5x + 6) > -1$; 2) $\log_8 (x^2 - 4x - 3) \leqslant 1$.

1227 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x-1}{x-1}\right) \leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2 - 5)) > 0$.

1228 1) $(x^2-4)\log_{0,5} x > 0$; 2) $(3x-1)\log_2 x > 0$.

1229 1) $x^{1-\lg x} < 0{,}1^{-2}$; 2) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$;

3) $x+3 > \log_3(26-3^x)$; 4) $3-x < \log_5(20+5^x)$.

1230 1) $\cos(-3x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$.

1231 С помощью графика решить неравенство:

1) $\sin x < \frac{1}{4}$; 2) $\sin x > -\frac{1}{4}$; 3) $\operatorname{tg} x - 3 \leqslant 0$; 4) $\cos x > \frac{1}{3}$.

1232 Используя графики тригонометрических функций, найти все решения неравенства, заключенные в промежутке $[-3\pi; \pi]$:

1) $2\cos x - \sqrt{3} < 0$; 2) $\sqrt{2}\sin x + 1 \geqslant 0$;

3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} x \leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x - 2 > 0$.

Доказать неравенство **(1233—1235)**.

1233 1) $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a>0$, $b>0$, $a \neq b$.

1234 1) $(a+b)(ab+1) \geqslant 4ab$, если $a>0$, $b>0$;

2) $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 > 4ab(a^2+b^2)$, если $a \neq b$.

1235 1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

2) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

4. Системы уравнений и неравенств

Решить систему уравнений **(1236—1237)**.

1236 1) $\begin{cases} 5x-7y=3, \\ 6x+5y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y-13=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

1237 1) $\begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{2} = 10, \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 6, \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 0. \end{cases}$

Найти действительные решения системы уравнений **(1238—1240)**.

1238 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \frac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

1239 1) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

1240 1) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 3\frac{1}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y, \\ y^2 = 4x + 13y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4x = 40, \\ 2x^2 + y^2 + 3x = 52. \end{cases}$

Решить систему уравнений **(1241—1246).**

1241 1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32, \\ 3^{3y-x} = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000. \end{cases}$

1242 1) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16, \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3. \end{cases}$

1243 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19. \end{cases}$

1244 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{3y + x + 1} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6. \end{cases}$

1245 1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + 2\sin x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos^2 x + 2\sin x \sin y + 4\cos^2 y = 4. \end{cases}$

1246 1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

1247 Найти наименьшее и наибольшее целые решения системы

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x+5}{3} - \frac{x}{6} < 3 - \frac{x+4}{2}, \\ 1 - \frac{2x-8}{3} + \frac{4-3x}{2} < 2x - \frac{x+2}{3}. \end{cases}$$

1248 Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x+2}{4} < \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{2}, \\ \frac{x-2}{3} > 1 + \frac{x-5}{15}. \end{cases}$

1249 Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за 3 мин, а по движущемуся за 45 с. За какое время поднимает эскалатор неподвижно стоящего на нем пассажира?

1250 Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, а против течения за 9 ч. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

1251 Пароход должен был пройти некоторое расстояние за 2,25 суток, но оказалось, что он проходил за каждый час на 2,5 км больше, чем предполагалось, а потому прошел намеченный путь за 2 суток. Какое расстояние должен был пройти пароход?

1252 Один рабочий выполняет некоторую работу за 24 дня, другой рабочий ту же работу может выполнить за 48 дней. За сколько дней будет выполнена эта работа, если рабочие будут работать вместе?

1253 При уборке урожая было собрано 4556 ц яровой пшеницы с общей площади 174 га, причем на целинных землях собрано по 30 ц с 1 га, а на остальной площади — по 22 ц. Сколько гектаров целинных земель было освоено?

1254 Разность двух чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

1255 Три дроби имеют числители, равные единице. Сумма этих дробей равна 1. Разность между первой и второй дробями равна третьей дроби. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найти эти дроби.

1256 Бригада рабочих должна была к определенному сроку изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада за день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

1257 Катер направился от речного причала вниз по реке и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до начала движения катера. Если бы катер отправился одновременно с плотом, то, пройдя 30 км и повернув обратно, встретил бы плот на расстоянии 10 км от речного причала. Найти собственную скорость катера.

1258 Две организации приобрели театральные билеты. Первая организация израсходовала на билеты 300 р., а вторая, купившая на 5 билетов меньше и заплатившая за каждый билет на 3 р. меньше первой организации, уплатила за

билеты 180 р. Сколько театральных билетов купила каждая организация?

1259 От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 17 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки по течению больше скорости плота на 48 км/ч?

1260 При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с 1 га больше, чем на втором?

1261 Расстояние от дома до школы 700 м. Сколько шагов делает ученик, проходя путь от дома до школы, если его старший брат, шаг которого на 20 см длиннее, делает на 400 шагов меньше?

1262 Найти четыре числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если третье число больше первого на 9, а второе больше четвертого на 18.

1263 Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна нулю, а сумма четырех первых членов равна 1.

1264 Найти четыре числа, зная, что первые три из них являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — арифметической прогрессии. Сумма первого и четвертого чисел равна 16, а второго и третьего равна 12.

1265 Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый ее члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

1266 Произведение пятого и шестого членов арифметической прогрессии в 33 раза больше произведения ее первого и второго членов. Во сколько раз пятый член прогрессии больше второго, если известно, что все члены прогрессии положительны?

1267 В треугольнике, площадь которого равна 12 см^2, середины сторон соединены отрезками. Во вновь полученном треугольнике точно так же образован новый треугольник и т. д. Найти сумму площадей всех получающихся таким построением треугольников.

1268 График линейной функции $y=-\frac{5}{2}x+b$ проходит через точку $(-2;\ 3)$. Найти b.

1269 График линейной функции $y = kx + 3$ проходит через точку $(-1;\ 4)$. Найти k.

1270 Найти коэффициенты k и b линейной функции $y = kx + b$, если ее график проходит через точки A и B:

1) $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$;

3) $A(4;\ 2)$, $B(-4;\ -3)$; 4) $A(-2;\ -2)$, $B(3;\ -2)$.

1271 Через точку $A(-3;\ 2)$ проходит прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $B(-2;\ 2)$ и $C(3;\ 0)$. Записать формулы, задающие линейные функции, графиками которых являются данные прямые.

1272 Выяснить, принадлежит ли прямой $x+\frac{y}{2}=1$ точка A:

1) $A(-1;\ 4)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(1;\ 0)$; 4) $A\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$.

1273 Линейная функция задана формулой $y=-\frac{3}{4}x+2$. Найти:

1) точки A и B пересечения ее графика с осями координат;
2) длину отрезка AB;
3) расстояние от начала координат до прямой $y=-\frac{3}{4}x+2$.

1274 Найти значения x, при которых график функции $y = 3x - 1$ расположен:

1) выше оси Ox; 2) ниже оси Ox.

1275 Найти значения x, при которых значения функции $y = -2x + 1$:

1) положительны; 2) отрицательны.

1276 Найти значения x, при которых график функции $y = 2x - 1$ лежит ниже графика функции $y = 3x - 2$.

1277 Найти значения x, при которых график функции

$$y=(\sqrt{3}-2)\,x-\sqrt{3}$$

лежит выше графика функции $y=(1+\sqrt{3})\,x+2\sqrt{3}$.

1278 Доказать, что функция $y = 2x - 3$ возрастает.

1279 Доказать, что функция $y=-\sqrt{3}\,x-3$ убывает.

1280 Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$; 2) $y = 3x - 2$ и $y = 5x + 1$.

1281 Построить график функции:

1) $y = 2 - |x|$; 2) $y = |2 - x|$; 3) $y = |2 - x| + |x - 3|$.

Выяснить, пересекает ли график каждой из данных функций прямую $y = 3$. В случае утвердительного ответа найти координаты точек пересечения.

1282 Дана функция $y = x^2 - 2x - 3$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция возрастает на промежутке [1; 4].

3) Найти значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.

4) Найти значения x, при которых график функции $y = x^2 - 2x - 3$ лежит выше графика функции $y = -2x + 1$.

5) Записать уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 3$ в точке с абсциссой, равной 2.

1283 Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция убывает на промежутке [1; 2].

3) Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.

4) Найти значения x, при которых график данной функции лежит ниже графика функции $y = 3x + 2$.

5) Записать уравнения касательных к параболе $y = -2x^2 + 3x + 2$ в точках с ординатой, равной 3.

1284 Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = x + 6$; 2) $y = \frac{3}{x}$ и $y = 4(x + 1)$;

3) $y = \frac{1}{8}x^2$ и $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$.

1285 Выяснить, является ли четной или нечетной функция:

1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = 3^x - 3^{-x}$;

3) $y = \ln\frac{3 + x}{3 - x}$; 4) $y = \left|\ln\frac{5 + x}{5 - x}\right|$.

1286 Исследовать функцию на четность и нечетность:

1) $y = 2x^2 - 1$; 2) $y = x - x^3$; 3) $y = x^5 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{\sin x}{x}$.

1287 Выяснить, является ли четной или нечетной функция:

1) $y = x\sin x$; 2) $y = x^2\cos 2x$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = x + \cos x$.

Найти наименьший положительный период функции **(1288—1289)**.

1288 1) $y=\cos\frac{3x}{2}$; 2) $y = 2\sin 0{,}6x$.

1289 1) $y = \cos 3x$; 2) $y=\sin\frac{x}{5}$;

3) $y = \operatorname{tg} 5x$; 4) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

1290 Исследовать функцию на четность и нечетность и построить ее график:

1) $y = -x^4 + 4x^2 - 5$; 2) $y = x^3 - 4x$.

1291 Найти наибольшее или наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx - 4$, если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$.

1292 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$; 2) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$.

1293 Найти точки пересечения графика квадратичной функции с осями координат:

1) $y = 2x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

1294 Построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 15$, $y(3) = 0$, $y(0) = -3$.

1295 Построить график функции $y=\sqrt{25-x^2}$. Указать по графику промежутки монотонности функции. Доказать, что график данной функции симметричен относительно оси Oy.

1296 Построить график функции $y=\frac{5}{x-2}$. Доказать, что функция убывает на промежутках $x < 2$ и $x > 2$. В какой точке график функции пересекает ось ординат?

1297 Выяснить основные свойства функции и построить ее график:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$;

3) $y = \log_2(x + 1)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$.

1298 Построить график функции:

3) $y = 2^{x-1} - 3$; 2) $y = \log_2(x + 2) + 3$.

Найти область определения функции **(1299—1302)**.

1299 1) $y = 2^x + \lg(6 - 3x)$; 2) $y = 3^{-x} - 2\ln(2x + 4)$;

3) $y=\frac{1}{\cos 2x}$; 4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

1300 1) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{x-6}}$.

1301 1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$; 2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$.

1302 1) $y = \sqrt{\log_{0,8}(x^2-5x+7)}$; 2) $y = \sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)}$.

Найти множество значений функции (**1303—1304**).

1303 1) $y = x^2 + 6x + 3$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$;

3) $y = e^x + 1$; 4) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$.

1304 1) $y = 0,5 + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 0,5\cos x + \sin x$.

1305 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

1306 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2x\sqrt{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

1307 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \dfrac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{4}$; 2) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 4$, $x_0 = -1$.

1308 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - x + 1$ в точке пересечения его с осью Oy.

1309 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^3 - 1$ в точке с ординатой $y = 2$.

1310 Прямая $y = 4x - 3$ является касательной к параболе $y = 6 - 2x + x^2$. Найти координаты точки касания.

1311 Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$ параллельны оси абсцисс.

1312 На параболе $y = 3x^2 + 7x + 1$ найти такую точку, в которой касательная к параболе образует с осью абсцисс угол $\dfrac{\pi}{4}$.

1313 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x\ln 2x$, $x_0 = 0,5$; 2) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

1314 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке M (2; −4).

1315 Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ образует с осью Ox.

1316 Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = \frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

1317 Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$ в точке его пересечения с осью Ox.

1318 Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x^3} + 1$ в точке с абсциссой $x = 4$.

1319 Найти промежутки монотонности функции:

1) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Найти точки экстремума функции **(1320—1321)**.

1320 1) $y = (x - 1)^3 (x - 2)^2$; 2) $y = 4 + (6 - x)^4$.

1321 1) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; 2) $y = \frac{x^2 + 6x + 3}{3x + 4}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции **(1322—1324)**.

1322 1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1323 1) $y = \sqrt{x + 5}$ на отрезке [−1; 4];

2) $y = \sin x + 2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1324 1) $y = \ln x - x$ на отрезке [0,5; 4];

2) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ на отрезке [0; 1].

1325 Периметр осевого сечения цилиндра 6 дм. При каком радиусе основания цилиндра его объем будет наибольшим?

1326 Найти наибольший возможный объем цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 54π см^2, если известно, что радиус основания не меньше 2 см и не больше 4 см.

1327 В правильной пирамиде $SABC$ из вершины S проведена высота SO. Найти сторону основания пирамиды, если объем пирамиды является наибольшим при условии, что $SO + AC = 9$ и $1 \leqslant AC \leqslant 8$.

1328 В правильной четырехугольной призме диагональ равна $2\sqrt{3}$. При какой высоте призмы ее объем наибольший?

1329 Для функции $f(x) = x^{-2} + \cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(0{,}5\pi;\ -\frac{2}{\pi}\right)$.

1330 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$ на отрезке $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

1331 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x$ на отрезке $e^{\frac{3}{4}} \leqslant x \leqslant e^3$.

1332 На параболе $y = x^2$ найти точку, расстояние от которой до точки $A\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ является наименьшим.

1333 На координатной плоскости даны точки $A(3; -1)$ и $D(4; -1)$. Рассматриваются трапеции, у которых отрезок AD является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = 1 - x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1334 На координатной плоскости дана точка $K(3; 6)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y = 4x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, а точка K является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1335 Каковы должны быть коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, чтобы при $x = 5$ она имела минимум, равный 1?

1336 Какой должна быть высота конуса с образующей в 20 дм, чтобы его объем был наибольшим?

1337 Какую наименьшую площадь поверхности имеет цилиндр, если его объем равен V?

1338 Найти радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

1339 Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

1340 Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

1341 В конус с заданным объемом V вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

1342 Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

1343 Из всех цилиндров, которые можно поместить внутри сферы радиуса R, найти цилиндр наибольшего объема.

1344 Консервная жестяная банка заданного объема должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания и высотой расход жести будет наименьшим?

1345 Из всех правильных треугольных призм, которые вписаны в сферу радиуса R, выбрана призма наибольшего объема. Найти высоту этой призмы.

1346 Из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H, найти цилиндр наибольшего объема.

1347 Найти экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^5 + 5$.

1348 Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 3x + 2$ и построить ее график. Найти точки, в которых касательные к графику параллельны оси Ox.

1349 Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 5x^2 - x + 5$ и построить ее график. Записать уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой, равной 4.

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график **(1350—1352)**.

1350 1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$;

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$; 4) $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$.

1351 1) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1352 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$; 2) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$;

3) $y = \frac{x^2+1}{x}$; 4) $y = \frac{x^2+2}{2x}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями **(1353—1357)**.

1353 1) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3 - x$, $y = 0$; 2) $y = -\frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$.

1354 1) $y = 4x - x^2$, $y = 5$, $x = 0$, $x = 3$;

2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 6$, $x = -1$, $x = 3$;

3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$;

4) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

1355 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$; 2) $y = x^2 + 3$, $y = x + 5$.

1356 1) $y = 9 - x^2$, $y = (x - 1)^2 - 4$; 2) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.

1357 1) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$; 2) $y = 3^x$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

7. Производная и интеграл

1358 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$, $x_0 = \frac{1}{3}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = x^{-3} - \frac{2}{x^2} + 3x$, $x_0 = 3$; 4) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1359 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = \sin 2x - x$; 2) $f(x) = \cos 2x + 2x$;

3) $f(x) = (2x - 1)^3$; 4) $f(x) = (1 - 3x)^5$.

1360 Показать, что $f'(1) = f'(0)$, если $f(x) = (2x - 3)(3x^2 + 1)$.

1361 Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + \sqrt{3}$ отрицательны.

1362 Пуля вылетает из пистолета вверх со скоростью 360 м/с. Найти скорость пули в момент $t = 10$ с и определить, сколько времени пуля поднимается вверх. Уравнение движения пули $h = v_0 t - 4{,}9t^2$.

1363 Колесо вращается так, что угол поворота прямо пропорционален кубу времени. Первый оборот был сделан колесом за 2 с. Определить угловую скорость колеса через 4 с после начала вращения.

Найти производную функции **(1364—1366)**.

1364 1) $y = \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3}$; 2) $y = \frac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

1365 1) $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$; 2) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$.

1366 1) $y = (2x + 1)^2\sqrt{x - 1}$; 2) $y = x^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}$;

3) $y = \sin 2x \cos 3x$; 4) $y = x \cos 2x$.

1367 Найти значения x, для которых производная функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равна -1.

1368 Определить знак числа $f'(2)$, если:

1) $f(x) = e^{3 - 2x} \cdot x^2$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{e^{1 - x}}$.

1369 Дана функция $f(x) = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. Найти $f'(0)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

1370 Найти значения x, при которых $f'(x) \leqslant g'(x)$, если $f(x) = x^3 + x^2 + x\sqrt{3}$, $g(x) = x\sqrt{3} + 1$.

1371 Для функции $f(x) = \cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = -1$.

1372 Найти первообразную функции:

1) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$; 2) $y = \frac{3}{4x-1}$.

Вычислить интеграл **(1373—1374).**

1373 1) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1)\,dx$; 3) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$.

1374 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2+2x+3)\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 (x^2-6x+8)\,dx$; 5) $\int\limits_1^3 (x^{-2}+1)\,dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x}\,dx$.

8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах

Гуманитарные классы

1375 1) Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ и указать любой его положительный корень.

2) Решить неравенство $\log_2(3 - 2x) < -1$.

3) Найти все числа a, для которых выполняется условие $4 \cdot 2^{3a} = 0{,}25^{\frac{a^2}{2}}$.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x(4 - x)$ и осью абсцисс.

5) Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$.

6) При каком значении a наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ равно 5?

1376 1) Решить уравнение $\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$.

2) Найти наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2(1 - x)$ на отрезке $[0; 1]$.

3) Решить уравнение $\lg x = \lg 3 - \lg(3x - 8)$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 3)^2$ и $y = 9$.

5) Решить неравенство $\frac{(x-5)\left(2^{\frac{1}{x-1}} + 0,2\right)}{x+2} \leqslant 0$.

6) При каких значениях a графики функций $y = x^2 - 4x + 2$ и $y = -2x + a$ имеют общие точки?

Общеобразовательные классы

1377 1) Решить неравенство $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4$.

2) Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - x^3$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0 = -1$.

3) Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.

5) При каких значениях a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет единственную стационарную точку?

6) Решить уравнение $\sin\frac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$.

1378 1) Найти значение выражения $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$.

2) Найти все точки графика функции $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, в которых касательная к этому графику проходит через начало координат.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - y\right) = 1, \\ x + y = -\frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

4) Решить неравенство $(3 - x)\log_3(x + 5) \leqslant 0$.

5) Вычислить интеграл $\int\limits_{6}^{6} \sqrt{36 - x^2}\,dx$.

6) Решить уравнение $\cos\sqrt{2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1379 1) Решить уравнение $\cos x \cos 3x = -0{,}5$.

2) Решить неравенство $\log_4 x^2 + \log_2^2 (-x) > 6$.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 9, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 9x - x^3$ и касательной к этому графику в его точке с абсциссой 3.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - 3 \sin x + 4 \cos x$ на отрезке $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6) Сравнить без таблиц и микрокалькулятора числа $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

1380 1) Решить уравнение $\cos 4x + 3 \sin^2 x = 0{,}25$.

2) Найти производную функции $y = \log_{3x+4} (7x - 4)$ в точке $x = 2$.

3) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 2 \cos 3x - 5 \sin 2x + 10$, осью абсцисс и прямыми $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$.

4) Найти множество значений функции $y = \sqrt{6x - 7} - 2x$.

5) Решить неравенство $9^{|x|} + 6 \cdot 3^x \geqslant 11$ и указать наименьшее натуральное число, ему удовлетворяющее.

6) На прямой $y = 6x - 9$ найти все такие точки, что через каждую из них проходят ровно 2 касательные к графику функции $y = x^2$ и угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

Задачи для внеклассной работы

1. Разные задачи

Решить уравнение (1381—1387).

1381 1) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{25+10x+x^2}=8$;

2) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=6$;

3) $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$;

4) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

1382 1) $16^{\sin 2x}+16\cos^2 x=10$;

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=34$.

1383 1) $x^3-3x^2+x=3$; 2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$;

4) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$.

1384 1) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\operatorname{ctg} 4x$;

2) $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

1385 1) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$; 2) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.

1386 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$.

1387 $\log_2 (4\cos x + 3)\log_6 (4\cos x + 3) = \log_2 (4\cos x + 3) + \log_6 (4\cos x + 3)$.

1388 Пересекает ли график функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ось Ox в точках, абсциссы которых являются целыми числами?

1389 Уравнение $2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найти третий корень этого уравнения.

1390 Решить систему уравнений и установить, при каких значениях параметров a и b она имеет решение:

1) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ x + y = a + a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \log_b x + \log_b y = 2. \end{cases}$

1391 Для всех значений параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2\sqrt{3|a|}\,y + x^2 + 2xy - y^2 - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2y - \cos(xy) + 11 - 6a + a^2 = 0. \end{cases}$$

Решить систему уравнений (**1392—1394**).

1392 1) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0. \end{cases}$

1393 $\begin{cases} 6\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = -3, \\ 5\sin x\cos y - 3\cos x\sin y = 1. \end{cases}$

1394 $\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x}. \end{cases}$

Решить неравенство (**1395—1399**).

1395 1) $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$; 2) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

1396 $\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 + 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$.

1397 $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0$.

1398 1) $\sqrt{2x - 7} \leqslant \sqrt{6x + 13}$; 2) $\sqrt{3 - x} < \sqrt{3x - 5}$.

1399 $\dfrac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geqslant 3x - 10.$

1400 При всех a решить неравенство $|x - 5a| \leqslant 4a - 3$ и указать все значения a, при которых решения этого неравенства являются решениями неравенства $x^2 - 4x - 5 < 0$.

Построить график функции (**1401—1404**).

1401 1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y = \dfrac{2}{1 - 2x}$; 3) $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 3}$; 4) $y = \dfrac{2x}{2 - |x|}$.

1402 1) $y = \dfrac{2}{(x - 1)(x - 3)}$; 2) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

1403 1) $y = \log_2 \sin x$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$;
3) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \sin^2 x$.

1404 1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arccos x$;
3) $y = \dfrac{1}{\sin x}$; 4) $y = \dfrac{1}{\log_2 x}$.

1405 Доказать тождество $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$.

1406 Вычислить:
1) $\cos\left(\arcsin \dfrac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right)$.

1407 Доказать, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сумма $\arcsin x + \arccos x$ равна C, где C — постоянная. Найти C.

1408 Найти все значения b, при каждом из которых функция $f(x) = \sin 2x - 8(b + 2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет стационарных точек.

1409 Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x$ и $y = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

1410 Через точку $A\left(2; -\dfrac{12}{5}\right)$ проведена касательная к параболе $y = -\dfrac{3}{5}x^2$, пересекающая ось абсцисс в точке B, а ось ординат в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BOC (O — начало координат).

1411 Через точку $A(3; -4)$ проведена касательная l к гиперболе $y = -\dfrac{12}{x}$. Найти радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс.

1412 Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 3 мили в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B, который идет на запад со скоростью 4 мили в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

1413 Графику функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = 2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку (0; 2), а другая — через точку (0; 6). Найти значения a, b, c.

1414 Графику функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = -2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку (0; 1), а другая — через точку (0; 5). Найти значения a, b, c.

1415 График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

1416 График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $c > 0$, пересекает ось ординат в точке D и имеет ровно две общие точки A и B с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке B, проходит через точку D. Найти a, b, c, если площадь треугольника ABD равна 1.

1417 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ и касательными к ней, проведенными через точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ и B (4; 2).

1418 Через точку графика функции $y = \sqrt{x}$ с абсциссой a, где $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$, проведена касательная к этому графику. Найти значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 3$, будет наименьшей, и вычислить эту наименьшую площадь.

1419 Дана фигура, ограниченная кривой $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку (0; 0), чтобы эта прямая разбивала данную фигуру на две фигуры равной площади?

2. Задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы

1420 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-4}=\sqrt{3x-2}$;

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$.

1421 Найти все действительные корни уравнения $|2\sqrt{x}+1-x|+|x-2\sqrt{x}+2|=7$.

Решить уравнение (**1422—1426**).

1422 1) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2) $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$;

3) $2\log_2 x-2\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}$;

4) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$.

1423 1) $1+\log_x(5-x)=\log_7 4\cdot\log_x 7$;

2) $(\log_9(7-x)+1)\log_{3-x}3=1$.

1424 1) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$;

2) $\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x+\sin 2x=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sin^2 x+\cos^2 3x=1$;

4) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$.

1425 1) $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$;

2) $\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x$.

1426 $\dfrac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}-\dfrac{1}{3}=4\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1427 Найти все корни уравнения $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

1428 Найти все корни уравнения $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin^2\dfrac{25\pi}{6}$, удовлетворяющие неравенству $\lg(x-\sqrt{2x+24})>0$.

1429 Найти наибольший на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\sin x\cos 2x=0$.

1430 Найти все значения a, при которых уравнение $\sin^8 x+\cos^8 x=a$ имеет корни, и решить это уравнение.

Решить систему уравнений **(1431—1433)**.

1431 1) $\begin{cases} x - 3y = -5, \\ \dfrac{x}{3y} - \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{23}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

1432 1) $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$

1433 1) $\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}, \\ \lg(y - 4x) = 2\lg(2 + 2x - y) - \lg y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 \cdot 2^{-x-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}, \\ \lg(x + 4y) = 2\lg(2 - x - 2y) - \lg x. \end{cases}$

1434 При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

1435 Решить неравенство:

1) $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geqslant 1$.

1436 Найти все значения a, при которых является верным при всех значениях x неравенство:

1) $\dfrac{8x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 2x + 1} \leqslant a$; 2) $\dfrac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geqslant a$.

Решить неравенство **(1437—1440)**.

1437 1) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2 - 5x + 6} < 1$; 2) $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.

1438 1) $\log_{\frac{1}{2}}(1 + x - \sqrt{x^2 - 4} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{1}{\log_5(3-2x)} - \dfrac{1}{4 - \log_5(3-2x)} < 0$.

1439 1) $\log_{|2x+1|} x^2 \geqslant 2$; 2) $\log_{x^2} |3x+1| < \dfrac{1}{2}$.

1440 $\dfrac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < -1$.

1441 Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 1) < 1$$

выполняется для всех x из промежутка $x < 0$.

1442 В какой точке графика функции $y = (x-1)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, нужно провести касательную к графику, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

1443 На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найти точки, касательные в которых проходят через начало координат.

1444 При каком значении k площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

1445 Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox является наименьшим? Найти это расстояние.

1446 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и касательными к ней, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$.

1447 Найти все значения x, при которых функция $y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

1448 Найти все значения a, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + (a+4)x + 2a + 3$ на отрезке $[0;\ 2]$ равно -4.

1449 Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение квадратичной функции $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $[0;\ 2]$ равно 3.

1450 Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y = 4x^2 + 8ax - 9$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

1451 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}.$$

Краткие теоретические сведения по курсу алгебры и начал анализа

Арксинус, арккосинус и арктангенс числа.

Арксинус числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$ (обозначается $\arcsin a$),— такое число α, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, синус которого равен a; $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Арккосинус числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$ (обозначается $\arccos a$),— такое число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, косинус которого равен a; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Например, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Арктангенс числа a, $a \in \boldsymbol{R}$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$),— такое число α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Например, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = a$, $|a| \leqslant 1$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$; $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\operatorname{tg} x = a$, $a \in \boldsymbol{R}$; $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Интеграл от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (обозначается $\int_a^b f(x)dx$) — предел интегральных сумм $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ при условии, что длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$

стремится к нулю. Здесь $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$.

Формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, принимающей положительные значения, равна

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Логарифм положительного числа x по основанию a, $a > 0$, $a \neq 1$ (обозначается $\log_a x$),— показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить x, т. е. $a^{\log_a x} = x$.

Например, $\log_3 27 = 3$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, $3^{\log_3 4} = 4$.

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $p \in \boldsymbol{R}$):

1. $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.
2. $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$.
3. $\log_a x^p = p \log_a x$.
4. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = x_2$.

Десятичный логарифм числа — логарифм этого числа по основанию 10, обозначается $\lg a$.

Натуральный логарифм числа — логарифм этого числа по основанию e, обозначается $\ln a$.

Число e — иррациональное число, $e \approx 2{,}718$.

Формула перехода от одного основания логарифма к другому:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Например, $\log_3 5 = \frac{\lg 5}{\lg 3}$, $\log_5 6 = \frac{\ln 6}{\ln 5}$.

Логарифмическая функция — функция

$$y = \log_a x, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения — множество всех положительных чисел.

2. Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3. Возрастающая, если $a > 1$; убывающая, если $0 < a < 1$.

4. Принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные — при $0 < x < 1$, если $a > 1$; положительные — при $0 < x < 1$, отрицательные — при $x > 1$, если $0 < a < 1$.

Нечетная функция — функция $f(x)$, обладающая свойством $f(-x) = -f(x)$ для каждого x из области ее определения.

Например, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ — нечетные функции.

Обратная функция к функции $y = f(x)$ — функция $y = g(x)$, которая получается при решении уравнения $f(x) = y$ относительно x и заменой x на y и y на x.

Например, $y = 2x - 1$ обратная к функции $y = \frac{x+1}{2}$; логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной к показательной функции $y = a^x$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Первообразная функции $f(x)$ на промежутке — такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ на этом промежутке.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то все первообразные можно записать в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Правила нахождения первообразных:

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то:

1) $F(x) + G(x)$ — первообразная функции $f(x) + g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$.

Первообразные некоторых функций:

Функция	Первообразная
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p-1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Периодическая функция — функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ для каждого x из области ее определения и для некоторого $T \neq 0$. Число T называют *периодом* этой функции.

Например, $f(x) = \sin x$ — периодическая функция с наименьшим положительным периодом, равным 2π.

Показательная функция — функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства показательной функции:

1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2. Множество значений — множество всех положительных чисел.
3. Возрастающая, если $a > 1$; убывающая, если $0 < a < 1$.

Производная функции $f(x)$ в точке x — предел разностного отношения

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Дифференцирование — операция нахождения производной.

Правила дифференцирования:

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
2. $(cf(x))' = cf'(x)$.
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Производные некоторых функций:

1. $(x^p)' = px^{p-1}$.

Например, $(c)' = 0$, где c — постоянная; $(x)' = 1$; $(x^2)' = 2x$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, где $x > 0$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, где $x \neq 0$.

2. $(e^x)' = e^x$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$.
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.

Геометрический смысл производной: $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Равносильные уравнения — уравнения, имеющие одно и то же множество корней.

Например, уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $(x - 2)(x - 3) = 0$ равносильны; уравнения $\log_2 x = 3$ и $2x - 16 = 0$ равносильны.

Уравнение называется *следствием данного уравнения*, если множество его корней содержит все корни данного уравнения.

Например, уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ является следствием уравнения $\sqrt{6 - x} = x$.

Два уравнения *равносильны* тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Тригонометрические формулы.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Зависимость между тангенсом, котангенсом, синусом и косинусом:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы и разности синусов и косинусов в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Формулы приведения получают по следующим правилам:

1. В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Тригонометрические функции — функции

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x.$$

Свойства тригонометрических функций.

Функция $y = \sin x$.

1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3. Периодическая, наименьший положительный период равен 2π, т. е. $\sin (x + 2\pi) = \sin x$.

4. Нечетная: $\sin (-x) = -\sin x$.

5. Наибольшее значение, равное 1, принимает при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; наименьшее значение, равное -1, принимает при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; значение, равное нулю, принимает при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; положительные значения — на интервалах $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; отрицательные значения — на интервалах $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Возрастающая на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; убывающая на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функция $y = \cos x$

1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3. Периодическая, наименьший положительный период равен 2π.

4. Четная: $\cos (-x) = \cos x$.

5. Наибольшее значение, равное 1, принимает при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; наименьшее значение, равное -1, принимает при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; значение, равное нулю, принимает при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; положительные значения — на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; отрицательные значения — на интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Возрастающая на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; убывающая на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$

1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3. Периодическая, наименьший положительный период равен π.

4. Нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

5. Значение, равное нулю, принимает при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; положительные значения — на интервалах $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; отрицательные значения — на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Четная функция — функция $f(x)$, обладающая свойством $f(-x) = f(x)$ для каждого x из области ее определения.

Например, $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ — четные функции.

Экстремум функции.

Возрастание и убывание функции. Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Точка максимума функции $f(x)$ — точка x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка минимума функции $f(x)$ — точка x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > (x_0)$.

Точка экстремума функции — точка максимума или минимума.

Стационарная точка функции — точка, в которой производная функции равна нулю.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума. Если при переходе через стационарную точку x_0 производная функция меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума этой функции, если производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума.

Для нахождения *наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке* нужно найти значения этой функции в точках экстремума и в концах отрезка, а затем выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Ответы и указания

1. 2) 0,(72); 4) −0,75; 6) 0,(13). **2.** 2) 1,(282051); 4) 0,49(6); 6) 1,3(2). **3.** 2) $1\frac{5}{9}$; 4) $-\frac{8}{9}$; 6) $-2\frac{379}{990}$. **4.** 1) 4; 2) $4\frac{3}{4}$. **5.** 2) 5,8. **8.** 2) $|x| = -x$; 3) $|x| = x$. **9.** 2) Иррациональное; 4) рациональное; 6) иррациональное. **10.** 2) 10; 4) $\frac{2}{3}$. **11.** 2) $\sqrt{11} - \sqrt{2,1} > \sqrt{10} - \sqrt{3,1}$. **12.** 2) 3; 3) $2 + \sqrt{3}$. **13.** 2) Да. **14.** 2) 341. **16.** 2) Да; 4) да. **17.** 2) 0; 4) −2. **18.** 2) 1,5; 4) $-\frac{2}{3}$. **19.** 2) $-31\frac{1}{4}$. **20.** 2) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{23}{90}$. **21.** 2) Нет; 4) да. **22.** 2) $2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$. **23.** 2) $q = \frac{1}{3}$. **24.** 1) −1; 2) 9; 3) 1. **25.** $2a$. **26.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} R_1$. **28.** 2) 2; 4) 15. **29.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **30.** 2) −1; 4) −4; 6) −8. **31.** 2) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **32.** 2) 5; 4) −11; 5) $\frac{1}{30}$. **33.** 2) 48; 3) 20. **34.** 2) 33; 4) 7. **35.** 2) 0,2; 4) 2. **36.** 2) 50; 4) 16. **37.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **38.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **39.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **40.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **41.** 2) $3x$; 4) $2 \cdot \frac{b}{a}$. **42.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **43.** 2) $4\sqrt{2}$; 4) 5. **44.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **45.** 2) $x \geqslant -3$; 4) $\frac{2}{3} \leqslant x < 2$. **46.** 2) 2. **47.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **48.** 2) ab^2c. **49.** 2) $3x$; 3) 0; 4) $a - 1$. **50.** 2) 7; 3) 1. **51.** 2) $(3 - x)^3$ при $x \leqslant 3$, $(x - 3)^3$ при $x > 3$; 4) $-3x - 5$. **52.** 2) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt{8} + \sqrt[3]{28}$. **54.** 3) 1. **57.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **58.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **59.** 2) 49; 4) 125. **60.** 2) 121; 4) 150. **61.** 2) 3; 4) 2,7. **62.** 2) b; 4) a; 6) $y^{-1\frac{1}{6}}$. **63.** 2) $a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}\right)$; 4) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(4x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$. **64.** 2) $\left(y^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(y^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$;

6) $\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}-n^{\frac{1}{12}}\right)\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}+n^{\frac{1}{12}}\right)$. **65.** 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)$; 4) $\left(3a^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{6}}\right)\times$ $\times\left(9a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$. **66.** 1) $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{c}-1$. **67.** $3c$. **68.** 2) 1; 4) $\frac{1}{16}$. **69.** 2) 3; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{624}{625}$. **70.** 2) 9; 4) 8. **71.** 2) 18; 4) 0,75. **72.** 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}>2^{1,7}$; 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$. **73.** 2) $(0{,}013)^{-1}>1$; 4) $27^{1,5}>1$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$. **74.** 2) a^2; 3) b. **75.** 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[4]{7}$. **76.** 2) $9\frac{5}{12}$; 4) $10\frac{19}{27}$. **77.** 2) a^2b. **78.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **79.** 2) 3. **80.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$. **81.** 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **82.** 2) y; 4) $4a^{-1}-\frac{1}{9}b^{-2\sqrt{3}}$. **83.** 2) $m^{\frac{3}{2}}$; 4) a^{-2}. **84.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x=2\pi$. **85.** 2) $x=\frac{3\sqrt{2}}{8}$; 4) $x=1$. **86.** 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}$. **87.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **88.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **89.** 2) $2\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$; 3) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1}$. **90.** 5306 р. 4 к. **91.** 2158 р. 70 к. **92.** 2) 2. **93.** 2) $2\frac{29}{90}$; 4) $\frac{34}{99}$. **94.** 1) 1; 0,01; $\frac{3}{2}$; $37\frac{1}{27}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{16}{81}$; 3) 2; 9; 10; 4; $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{16}$. **95.** 2) 64; 10; 5; 2; 3) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{7}$; $11\frac{1}{9}$. **96.** 2) 15; 4) 1000; 6) $\frac{81}{256}$. **97.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4. **98.** 2) 98^0; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$. **99.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<$ $<(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$. **100.** 2) a^{-1}; 4) $a^{\frac{5}{7}}$. **101.** 2) $a^{\sqrt{3}}$. **102.** 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **103.** 2) $x=3$; 4) $x=2$; 5) $x=-2$. **104.** 2) $a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$. **105.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$. **107.** 2) $\frac{2681}{24750}$. **108.** $\frac{81}{2}$. **109.** 10. **110.** $a=2-\sqrt{5}$, $a<0$. **111.** 2) $a<b$; 4) $a<b$. **112.** 2) $\frac{5\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{15}$; 4) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$; 6) $\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$; 8) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. **113.** 2) 7. **114.** 2) $2\sqrt[3]{xy}$; 4) $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$. **115.** 2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$; 4) a^2+b^2. **116.** 2) 1. **117.** 2) a^{-1}; 3) 1. **122.** 2) $0{,}2^{0,3}>1$; 4) $\sqrt{3}^{\,0,2}>1$. **123.** 2) Выше при $x>1$, ниже при $0<x<1$. **124.** 2) Выше при $0<x<1$, ниже при $x>1$. **125.** 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}<\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; 4) $2{,}5^{-3,1}>$

$>2{,}6^{-3{,}1}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-0{,}2}>(6\sqrt[3]{2})^{-0{,}2}$; **126.** 2) $y=x^4$: область определения — $x\in R$, множество значений — все числа $y\geqslant 0$; $y=x^{\frac{1}{4}}$: область определения — все числа $x\geqslant 0$, множество значений — все числа $y\geqslant 0$; 4) $y=x^5$: область определения — $x\in R$, множество значений — $y\in R$; $y=x^{-5}$: область определения — $x\neq 0$, множество значений — $y\neq 0$. **127.** 2) Выше при $0<x<1$, ниже при $x>1$. **128.** 2) $x\geqslant 0$, $y\geqslant -1$; 4) $x>-1$, $y>0$; 5) $x\neq 2$, $y>0$; 6) $x>0$, $y>0$. **129.** 2) $x\in R$, $y\geqslant 0$, возрастает при $x\geqslant 0$, убывает при $x\leqslant 0$; 4) $x\in R$, $y\geqslant -2$, возрастает при $x\geqslant 0$, убывает при $x\leqslant 0$; 5) $x\in R$, $y\geqslant 0$, возрастает при $x\geqslant -2$, убывает при $x\leqslant -2$; 6) $x\neq 0$, $y\neq 0$, убывает при $x>0$, возрастает при $x<0$. **130.** 2) (0; 0), (1; 1). **132.** 2) $y=\frac{4-x}{5}$; 4) $y=\frac{2x+1}{3}$; 6) $y=\sqrt[3]{x+3}$. **133.** 2) Все действительные числа; 4) все действительные числа; 6) $x\neq 0$, $y\neq 4$. **135.** 2) Нет; 4) да. **136.** 2) $y=-\sqrt[3]{x^5}$; 4) $y=-x^3$. **137.** 2) Все действительные числа; 4) $y=(x-1)^2$, $x\geqslant 1$, $y\geqslant 0$, $y=\sqrt{x}+1$: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 1$; 6) $y=(x-1)^3$: все действительные числа; $y=\sqrt[3]{x}+1$: все действительные числа; 8) $y=\sqrt{x}+1$: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 1$; $y=(x-1)^2$: $x\geqslant 1$, $y\geqslant 0$. **138.** 2) Нет корней; 4) нет корней. **139.** 2) Равносильны; 4) не равносильны; 6) равносильны. **140.** 2) Равносильны; 4) не равносильны. **141.** 2) Первое. **142.** 2) Нет корней; 4) $x=4$. **143.** 2) $3{,}5<x<5$. **144.** 2) Равносильны. **145.** 2) Равносильны; 4) равносильны. **146.** 2) Оба. **147.** $x=3$. **148.** 2) $x=6$. **149.** 2) $-2<x<1$, $x>2$. **150.** 1) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=4$; 2) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-3$, $x_3=-2$, $x_4=1$; 4) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$. **152.** 2) $x=27$; 3) $x=5$. **153.** 2) $x=-7$; 3) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{3}$. **154.** 2) $x=5$; 4) $x_1=-3$, $x_2=4$. **155.** 2) $x=4$; 4) $x=-1$. **156.** 2) $x=5$; 4) $x_1=-3$, $x_2=1$. **157.** 2) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. **158.** 2) $x=-3$; 4) $x=18$. **159.** 1) $x=-4$; 2) $x=5$. **160.** 2) $x=10$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{17}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **161.** 2) $x_1=-1$, $x_2=-3$. **162.** 2) Два; 4) один, $x=1$. **163.** 1) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$; 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 3) $x_1=-4$; $x_2=1$; 4) $x_1=-6$, $x_2=1$. **164.** 1) $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4a^2+9})$ при $a\geqslant 0$, нет корней при $a<0$; 2) $x=-1+\sqrt{a^2-2a+2}$ при $a\geqslant 1$, нет корней при $a<1$. **165.** 1) $1\leqslant x\leqslant 1{,}5$; 3) $x<-5$. **166.** 2) $0\leqslant x\leqslant 9$; 4) $x<13{,}5$; 6) $0\leqslant x\leqslant 2$. **167.** 2) $2\leqslant x<3$; 4) $x<-5$; 6) $x\geqslant -\frac{5}{9}$; 8) $-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant -\frac{19}{16}$. **168.** 2) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 4) $-5<x<-3$, $3<x<5$. **169.** 2) $-1\leqslant x\leqslant 2$; 4) $x<-1$, $x>2$; 6) $0\leqslant x\leqslant 4$. **170.** 2) $x\geqslant -1$; 4) $\frac{2}{3}\leqslant x<6$; 6) $2<x\leqslant 3$. **171.** 1) $x>\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $-3\leqslant x<6$. **174.** 1) $1\leqslant x\leqslant a^2+1$ при $a>0$, нет решений при $a\leqslant 0$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})\leqslant x\leqslant 0$. **177.** 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, $(\sqrt{2})^{\pi}$, $(1{,}9)^{\pi}$, π^{π}; 4) $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$, $(1{,}3)^{-\frac{2}{3}}$, $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$. **178.** 2) $x_1=-1$, $x_2=1$.

179. 2) $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; 4) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$. **180.** 2) $y = \frac{2}{x} + 3$, $x \neq 0$, $y \neq 3$; 4) $y = \sqrt[3]{x+1}$, все действительные числа. **182.** 2) Являются; 3) являются. **183.** 2) $x = 21$; 4) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$; 6) $x_{1,2} = \pm 8$. **185.** 2) Являются; 4) не являются. **186.** 2) $y = x^2 - 4x$, $x \leqslant 2$, $y \geqslant -4$; 4) $y = 6x - x^2 - 8$, $x \geqslant 3$, $y \leqslant 1$. **187.** 2) $x = 1$; 4) $x = 0$. **188.** 2) $x = 259$; 4) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; 5) $x = -\frac{12}{5}$; 6) $2 \leqslant x \leqslant 7$. **189.** 2) $x < 0$; 4) $x \geqslant -\frac{1}{2}$. **190.** 1) $6 < x \leqslant 8$; 2) $x < -4$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{8}{7}$; 3) $1 < x < 6$; 4) $-6 < x \leqslant 3$. **191.** 1) Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $6 \leqslant x < \frac{a^4 + 16a^2 + 16}{4a^2}$; 2) $-\frac{|a|}{\sqrt{2}} < x \leqslant |a$ при $a \neq 0$, нет корней при $a = 0$. **196.** 2) Больше 1; 4) больше 1. **197.** 2) $x = -1$; 4) $x = -2$. **200.** 2) $x > 0$; 4) $x < -1$. **206.** 88,4 г, 22,1 г. **207.** $4{,}87 \cdot 10^5$ м^3. **208.** 2) $x = \frac{2}{3}$; 4) $x = -\frac{2}{3}$. **209.** 2) $x = -0{,}5$; 4) $x = 4$. **210.** 2) $x = 2{,}5$; 4) $x = 9$; 6) $x = 0{,}4$. **211.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$. **212.** 2) $x = 0$; 4) $x = 0$. **213.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x = 1$. **214.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) $x = -\frac{1}{3}$. **215.** 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; 4) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -3$. **216.** 2) $x = 0{,}8$; 4) $x = -1$. **217.** 2) $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = -0{,}2$; 4) $x = 4$. **218.** 2) $y = 3$; 4) $x = 2$. **219.** 2) $x = 3$; 4) $x = 3$. **220.** 2) $x = -1$; 4) $x = 1$. **221.** 2) $x = 3$; 4) $x = \frac{1}{2}$. **222.** 2) $x = -3$; 4) $x = 4$. **223.** 2) $x = -1$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 6) $x = -1$. **224.** $x = 4$. **225.** 1) $x = -3$; 2) $x = 2$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 4) $x = 3{,}25$. **226.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **228.** 2) $x < 2$; 4) $x < -0{,}5$; 6) $x \geqslant 3$. **229.** 2) $x > 4$; 4) $-3 < x < 3$. **230.** 2) $x = 1$; 4) $x = 2$. **231.** 2) $\frac{1}{2} < x < 1$; 4) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. **232.** 2) $x > 1$; 4) $x \leqslant 1$. **233.** 2) $x < 2$, $(-3; -2; -1; 0; 1)$; 4) $x < -1$, $(-2; -3)$. **234.** $x > 0$. **235.** При $x > -2$. **238.** 1) $0 \leqslant x < 3$, $-6 \leqslant x < 0$; 2) $5 < x \leqslant 30$. **239.** 1) $x < -1$; 2) $-2 < x < 1$; 3) $x < 0$, $x > 1$; 4) $-\frac{4}{3} < x < 2$. **240.** 2) $(0; -2)$, $(-1; -3)$; 4) $\left(3\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **241.** 2) $\left(\frac{2}{3}; -1\right)$. **242.** 2) $(1; 1)$. **243.** 2) $(3; -2)$; 4) $(0; 1)$; 6) $(0; 2)$. **244.** 1) $x = 1\frac{2}{3}$; 2) $x = \frac{1}{5}$. **245.** 1) $(7; 3)$; 2) $(3{,}5; 2)$. **246.** 2) $2^{\sqrt{3}} > 2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$. **247.** 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3} > 1$. **249.** 2) $0{,}04 \leqslant y \leqslant 5$. **250.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **251.** 2) $x = 0$; 4) $x = 2$. **252.** 2) $x = 1$; 4) $x = 3$. **253.** 2) $x < -1$; 4) $-2 < x < 2$. **256.** $a(1 + 0{,}01p)^{n \quad 1}$. **258.** 2) $x = 24$. **259.** 2) $x = 9$; 4) $x = 1$. **260.** 2) $x = 0$; 4) $x = -0{,}5$. **261.** 2) $-3 < x < 1$; 4) $-1 < x \leqslant 1$. **262.** 2) $(1; 1)$. **264.** 2) $x = 4$; 4) $x = 1$. **265.** 2) $x < -3$, $x > 1$; 4) $x < -1\frac{1}{3}$, $x > 4$. **266.** 1; 2;

3; 4; 0; –1; –2; –5; $\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$. **267.** 2) 6; 4) 0. **268.** 2) –3; 4) $-\frac{1}{4}$.
269. 2) 4; 4) 0. **270.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{4}$. **271.** 2) –2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. **272.** 2) 3; 4) –3. **273.** 2) –3; 4) –2. **274.** 2) 16; 4) 6. **275.** 2) 64; 4) 3. **276.** 2) 144; 4) 1. **277.** 2) $x = 625$, 4) $x = 25$; 5) $x = 5{,}5$. **278.** 2) $x < 7$; 4) $x > \frac{1}{2}$; 6) $x < 0$. **279.** 2) –1,5; 4) $-1\frac{2}{3}$. **280.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 512; 6) $1\frac{2}{7}$. **281.** 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 5) 2. **282.** 2) $x = 7$; 3) $x = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$. **283.** 2) $x < -3$, $x > 2$; 4) $x \in \boldsymbol{R}$.
284. 2) $x > -2$; 4) $-2 < x < 0$, $x > 1$. **285.** 2) $x = \log_{1,2} 4$; 4) $x = \frac{1}{2}(1 - \log_7 2)$.
286. 2) $x = \log_3 4$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = \log_{\frac{1}{3}} 2$. **287.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{1,5} 3$; 2) $x = \log_{0,6} 2$. **288.** 1) $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 1$; 2) $1 < x < 2$, $x > 2$. **289.** Если $a > 0$, $a = -1$, то $x = \log_3 a^2$; если $a < 0$, $a \neq -1$, то $x_1 = \log_3 a^2$, $x_2 = \log_3 (-a)$.
290. 2) 3; 4) 2. **291.** 2) 2; 4) –3. **292.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{1}{6}$. **293.** 2) 1,5; 4) –4.
294. 2) 1,5; 4) –3. **295.** 2) 11. **296.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. **297.** 2) $x = \frac{a^2}{b^3}$; 4) $x = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[7]{b^4}$.
298. 1) 3; 2) $16\frac{3}{4}$; 3) 475; 4) 22,5. **299.** 2) 1. **300.** 1) $2(a + b - 1)$; 2) $2a + \frac{1}{2}$.
301. 2) 0,845; 4) –0,176. **302.** 2) 0,693; 4) –0,154. **303.** 2) 1,29; 4) –0,42.
304. 2) 1,3; 4) –15,42. **305.** 2) $\frac{\log_7 6}{\log_7 10}$; 4) $\frac{\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 5}$; 6) $\frac{1}{\log_7 3}$. **306.** 1) 25; 2) $-\frac{1}{2}$. **307.** 2) $x = 8$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **308.** $\frac{1}{2} + m$. **309.** $\frac{m+1}{m+n}$.
310. $\frac{2+m}{1+2m}$. **311.** $1 - \frac{2}{3}m$. **312.** 1) –2; 2) –3. **313.** 2) $x_1 = 9$, $x_2 = 27$; 4) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \sqrt{2}$. **314.** 2) 1. **315.** 9 лет. **316.** 3052 качания. **317.** 2) 2,7182788; 4) 2,7182819. **318.** 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.
319. 2) $\log_3 0{,}45 < 0$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6 < 0$. **320.** 2) $x < 1$; 3) $x > 1$. **325.** 2) $x \geqslant \frac{1}{8}$; 4) $x > 0{,}5$. **326.** 2) $0 < x < 0{,}16$; 4) $x \geqslant 0{,}16$. **327.** 2) $x = 8$; 4) $x = 46$; 6) $x = -1{,}6$. **328.** 2) $x > -1$; 4) $-2 < x < 2$. **330.** 2) $\frac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2} < \lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$; 4) $\lg\lg\lg 50 < \lg^3 50$. **331.** 2) $-1 < x < 6$; 4) $x > 4$; 6) $x > 3$. **332.** 2) $x > -1$, $y \in \boldsymbol{R}$; 4) $x > 0$, $y \in \boldsymbol{R}$; 5) $x > 1$, $y \in \boldsymbol{R}$. **333.** 2) $x = 2$; 4) $x \approx 2$.
334. 1) $x > 0$, $y \geqslant 0$; убывает при $0 < x \leqslant 1$, возрастает при $x > 1$, 2) $x \neq 0$, $y \in \boldsymbol{R}$, убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$; 3) $x \neq 3$, $y \in \boldsymbol{R}$, убывает при $x < 3$, возрастает при $x > 3$; 4) $x > 0$, $y \geqslant 0$, убывает при $0 < x \leqslant 2$, возрастает при $x > 2$. **335.** 1) $x \neq 2$, $x \neq 3$; 2) $-1 < x < \frac{1}{2}$.
336. 2) Каждое из двух — следствие другого; 3) второе. **337.** 2) $x = 3$;

4) $x=\sqrt{2}$. **338.** 2) Корней нет; 3) $x = 2$. **339.** 2) $x = 5$. **340.** 2) Корней нет. **341.** 2) $x = 1$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. **342.** 2) (1; 9). **343.** 2) $x_{1,2} = \pm 8$; 4) $x = 16$; 6) $x = 3$. **344.** 2) $x = 3$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -8$. **345.** 2) $x = 9$; 4) $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$. **346.** 2) Да. **347.** 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$. **348.** 2) $x_1 = 4$, $x_2=\sqrt{2}$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 27$, $x_2=\frac{1}{9}$. **349.** 2) $x=\frac{2}{7}$. **350.** 2) $x=-4$. **351.** 1) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2 = 3$; 2) $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2 = 2$. **352.** 1) $x=5^{\frac{1}{3}}$; 2) $x = 4$. **353.** $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$, $x=5^{\frac{a \log_5 a}{3 \log_5 a + 1}}$. **354.** 2) $x<\frac{7}{5}$; 4) $-2 < x < 2$. **355.** 2) $x \leqslant -30$; 4) $1 < x \leqslant 10$; 6) $x < -0{,}05$. **356.** 2) $x > 25$; 4) $\frac{5}{3}<x<3$. **357.** 2) $2 < x \leqslant 3$; $11 \leqslant x < 12$. **358.** 2) $-\frac{2}{3}<x<1$; 4) $x \geqslant \sqrt{2}$. **359.** 2) $x > 7$; 4) решений нет. **360.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x < -0{,}5$, $x > 3$. **361.** 2) $x < 2$, $x > 3$; 4) $-2 \leqslant x < -1$, $6 < x \leqslant 7$. **362.** 2) $-\sqrt{2}<x<-\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}<x<\sqrt{2}$. **363.** 2) $x > 2$. **364.** 2) $0 < x < 0{,}1$, $x > 10\,000$. **365.** 2) $\log_3 \frac{1}{2}<x<\log_3 \frac{2}{3}$, $x > \log_3 2$; 4) $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\frac{6}{5}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$. **366.** $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\log_3 \sqrt{2} < x \leqslant 1$. **367.** $2 - \log_4 5 < x \leqslant 1$. **368.** 2) 4; 4) –3. **369.** 2) –4; 4) 6. **370.** 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. **371.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **372.** 2) –2,2. **373.** 2) 2,26; 4) –1,73. **375.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **377.** 2) $x < 0$, $x > 2$. **378.** 1) $x=\frac{3}{8}$; 2) $x = 2$. **379.** 2) $x_1 = 1$, $x_2=-\frac{3}{2}$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. **380.** 2) $x=-4$; 4) $x = 2$. **381.** 2) $x < 4$; 4) $x < -1$. **382.** 2) Решений нет. **383.** 2) $x < -8$, $x > 1$. **384.** 2) –4,5; 4) 36; 6) 2. **385.** $2^{2 \log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9} > \sqrt{8}$. **386.** 1,223. **387.** 0,611. **388.** $0 < x < 1$. **390.** 2) $x=\frac{1}{3}\log_2 3$; 4) $x=\frac{1}{4}\left(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5-5\right)$; 6) $x = \log_5 3$. **391.** 2) $x = 27$; 4) $x_1 = 27$, $x_2=\frac{1}{27}$. **392.** 2) $x = -4$; 4) $x_1 = 14$, $x_2 = 6$. **393.** 2) Корней нет. **394.** 2) $x = 4{,}5$. **395.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) корней нет. **396.** 2) $5 < x \leqslant 6$; 4) $x > 4$; 6) $-4 < x < -3$. **397.** 2) $0 < x < 1$, $x=\sqrt{3}$. **399.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **401.** 2) $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$. **402.** 2) $x_1 = 23$, $x_2 = -1{,}8$. **403.** 2) $x=2-\sqrt{2}$; 3) $x = 0$; 4) $x = 2$. **404.** 2) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$. **405.** 5. **406.** $\frac{1}{a}<x<\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}<x<a$, если $a > 1$; $\frac{1}{\sqrt{a}}<x<\frac{1}{a}$, $a<x<\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$. **407.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{8\pi}{45}$; 6) $\frac{7\pi}{9}$. **408.** 2) 20°; 3) 135°; 5) $\left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$; 6) $\left(\frac{64{,}8}{\pi}\right)^\circ$. **410.** 0,4 м. **411.** 2 рад. **412.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2.

413. 2 рад. **416.** 2) (0; 1); 3) (0; –1); 5) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
420. 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **421.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **422.** 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) (1; 0), (–1; 0). **423.** 2) $\pi + 2\pi k$, где k — любое целое число; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число. **424.** 2) Вторая; 4) четвертая. **425.** 1) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 2) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 3) $x = \frac{5}{3}\pi$, $k = 2$. **427.** 2) (0; 1); 4) (0; –1).
428. 2) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **430.** 2) –1; 4) –1; 6) 1.
431. 2) 0, 1; 4) 1, 0; 6) 0, –1. **432.** 2) 2; 4) –1. **433.** 2) 0; 4) –1.
434. 2) –7; 4) $-\frac{1}{4}$. **435.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **436.** 2) Да; 4) нет. **437.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **438.** 2) 2,75; 4) $1\frac{1}{12}$. **439.** 2) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = -\frac{4}{5}\pi + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **440.** 2) Верно; 4) неверно. **441.** 2) 0,09; 4) 0,7; 6) –0,22; 8) 0,36. **442.** 2) Во второй; 3) в третьей; 5) во второй; 6) в четвертой; 8) в третьей. **443.** 2) В третьей; 4) во второй; 6) во второй. **444.** 2) $\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right) < 0$; 3) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0$; 4) $\sin(-0{,}1\pi) < 0$; 5) $\sin 5{,}1 < 0$; 6) $\sin(-470°) < 0$. **445.** 2) $\cos\frac{7}{6}\pi < 0$; 3) $\cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) > 0$; 4) $\cos 4{,}6 < 0$; 5) $\cos(-5{,}3) > 0$; 6) $\cos(-150°) < 0$.
446. 2) $\operatorname{tg}\frac{12}{5}\pi > 0$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{4}\pi\right) < 0$; 4) $\operatorname{tg} 3{,}7 > 0$; 5) $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$; 6) $\operatorname{tg} 283° < 0$. **447.** 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$. **448.** 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1{,}3) < 0$, $\cos(-1{,}3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$. **449.** 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$; 6) $\sin(\pi - \alpha) > 0$. **450.** 2) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.
451. Знаки совпадают для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и для $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, знаки различны для $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и для $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. **452.** 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} < 0$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > 0$.
453. 2) $\cos 1{,}3 > \cos 2{,}3$. **454.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
455. 2) Во второй. **456.** 0,03 — да, $\frac{2}{3}$ — да, $\frac{5}{3}$ — нет, $\frac{11}{13}$ — да, $-\frac{13}{11}$ — нет, $\sqrt{2}$ — нет, $\frac{2}{3}$ — да. **457.** 2) Могут; 3) не могут; 4) не могут. **458.** 2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$. **459.** 2) $\cos\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$; 6) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 8) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$. **460.** 2) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$;

4) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. **461.** 2) Не могут. **462.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **463.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **464.** 2) $\frac{11}{16}$. **466.** 2) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **467.** 2) 4; 4) 2. **469.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **471.** $\frac{8}{25}$. **472.** $\frac{37}{125}$. **473.** 7. **474.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **475.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3; 6) 2. **476.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 4. **477.** 2) 0,5. **478.** 2) $-2\cos\alpha$. **480.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **481.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **482.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1. **483.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **484.** 2) $\cos 3\beta$; 4) -1. **485.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **486.** 2) $\frac{-\sqrt{14}-2}{6}$. **487.** 2) $-\cos\beta\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha\cos\beta$. **488.** $\frac{84}{85}$, $\frac{36}{85}$. **489.** $-\frac{63}{65}$. **490.** $2\frac{5}{36}$. **491.** 2) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha\sin 3\alpha$. **493.** 2) 1; 4) $\sqrt{3}$. **494.** 2) $\frac{1}{7}$. **495.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$. **496.** 2) $\sin 2\beta$. **497.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=4\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **499.** 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **500.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **501.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1. **502.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -2. **503.** 1) $\frac{24}{25}$. **504.** 2) $\frac{7}{25}$. **505.** $\frac{4}{3}$. **506.** 2) $\sin 50°$; 4) $\cos^2 2\alpha$. **507.** 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **509.** 2) $\frac{8}{9}$. **512.** 2) $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}-\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **513.** 2) $\frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$; 4) $\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}$. **514.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **515.** 2) $\sqrt{0,8}$; 4) 2. **516.** 2) $\sqrt{0,1}$; 4) $\frac{1}{3}$. **522.** $\cos 4\alpha$. **523.** 2) $x=4\pi k$, $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 5) $x=8\pi k$, $x=2\pi+4\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **524.** 2) $\alpha=60°$; 4) $\alpha=40°$; 6) $\alpha=\frac{3\pi}{10}$; 8) $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **525.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **526.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$; 8) 1. **527.** 2) -1. **528.** 2) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **529.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) 1; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **530.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$. **531.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1. **535.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **537.** 2) $2\sin\frac{\pi}{8}\sin\beta$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$. **538.** 2) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **541.** 2) $2\sin\alpha$. **543.** 2) $2\sqrt{3}\cos^2\frac{\pi}{24}$. **546.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. **547.** 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **548.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **549.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

550. 2) $2 \sin \alpha$. **551.** 2) $-\text{ctg}\,\alpha$. **553.** 2) 0. **554.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **557**: $4 \sin 2\alpha$. **560.** -4. **561.** $1\frac{5}{6}$. **562.** $-\frac{4}{9}$. **568.** 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **569.** 2) 2π; 4) 8π. **570.** 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \arccos(-1)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. **571.** 2) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **572.** 1) $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **573.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **574.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **575.** 2) Да; 4) нет; 5) да. **576.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **577.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k = 0, 2$. **578.** $x = \pm\frac{\pi}{16} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **579.** 2) $x = -2{,}5$. **580.** 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. **581.** 2) 6; 4) $2\pi - 4$. **582.** 2) $\frac{24}{25}$. **583.** $2a^2 - 1$. **585.** 2) $x \approx \pm 1{,}84 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **586.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$. **587.** 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **588.** 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > \arcsin(-1)$. **589.** 2) $x = (-1)^n \times \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **590.** 1) $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2}{7} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = (-1)^n \times \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **591.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **592.** 2) $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **593.** 2) Да; 4) нет; 6) нет. **594.** 2) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = (-1)^n\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{3\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **595.** 2) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **596.** 1) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = (-1)^n\frac{1}{3} \times \arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **597.** $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$. **598.** $\frac{14\pi}{3}$. **601.** 2) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **602.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **603.** 2) $\frac{7}{25}$. **604.** 2) $x = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$; **606.** $x \approx (-1)^{n+1} \times 0{,}32 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **607.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **608.** 2) 0; 3) $-\frac{47\pi}{12}$. **609.** 4) $\text{arctg}\,(-5) < \text{arctg}\,0$. **610.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = -\text{arctg}\,4{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **611.** 1) $x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **612.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \text{arctg}\,4{,}5 + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **613.** $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$. **614.** 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{5}$. **615.** 2) $-0{,}3$; 4) -6. **616.** 2) 2; 4) $13 - 4\pi$. **617.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **619.** 2) $x \approx -1{,}44 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **620.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

3) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **621.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **622.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \text{arctg}\, 4 + \pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **623.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \text{arctg}\, 3 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \text{arctg}\, 3 + \pi n$, $x = -\text{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **624.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = -\text{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **625.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$. **626.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **627.** 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **628.** 2) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \pm\pi + 8\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \text{arctg}\, 3 + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **629.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **630.** 2) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **631.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **632.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$. **633.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **634.** 2) Корней нет; 4) $x = \pi n$, $n \in Z$. **635.** 2) $x = \pi n$; 4) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **636.** 2) $x = \text{arctg}\, 2 + \pi n$, $x = \text{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) корней нет. **637.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **638.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in Z$. **639.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **640.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **641.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **642.** 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **643.** 2) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **644.** 2) $x = \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **645.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}k$, $n, k \in Z$; 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n, k \in Z$. **646.** $|a| \leqslant 2$, $x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **648.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **649.** 4) $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **650.** 2) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **651.** 2) Решений нет; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **652.** 2) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **653.** 2) $12 - 3\pi + 8\pi n < x < 12 - \pi - 8\pi n$, $n \in Z$. **654.** 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x <$

$< \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **655.** 2) $-\frac{7\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$. **656.** 2) $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **657.** 2) $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \times \arcsin \frac{2}{5} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **658.** 2) $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **659.** 2) $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{3\pi}{28} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **660.** 2) $x = (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **661.** 2) $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{39} - 3}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **662.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **663.** 2) $x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{5}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **664.** 2) Корней нет. **665.** 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **666.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) 1. **667.** 2) 0; 3) -1; 4) 0. **668.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **669.** 2) $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **670.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **671.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **672.** 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **673.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **674.** 2) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **675.** 1) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **676.** 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **677.** 1) $\frac{5}{4}$; 2) 2. **678.** 2) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) корней нет. **679.** 2) Корней нет. **680.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **681.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **682.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **683.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \arcsin \left(\frac{7 - \sqrt{65}}{4} \right) - \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **684.** $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **685.** 2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi(n + k)$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **687.** $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm \arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **688.** $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$. **689.** При $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin 3a + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n-1} \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\frac{1}{3} < |a| \leqslant 1$ $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $|a| > 1$ нет корней. **690.** 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **692.** 2) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 6) $-1{,}25 \leqslant y \leqslant -0{,}75$. **693.** 2) $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **694.** 2) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **695.** 2) $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **696.** 2) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $1\leqslant y\leqslant 10$; 6) $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. **697.** 5 и -5. **698.** $-\sqrt{26}\leqslant y\leqslant\sqrt{26}$. **699.** $1\leqslant y\leqslant 11$. **700.** 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) четная. **701.** 2) Не является четной и нечетной; 4) четная; 6) четная. **704.** 2) Четная; 4) нечетная; 6) четная. **705.** 2) $\frac{4\pi}{3}$; 4) π. **706.** 2π. **710.** 2) $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi;\ 0]$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. **711.** 2) $\cos\frac{8\pi}{7}<\cos\frac{10\pi}{7}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)<\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 6) $\cos 4<\cos 5$. **712.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$. **713.** 2) $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}<x\leqslant 3\pi$. **714.** 2) $\sin\frac{\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}>\sin\frac{3\pi}{10}$. **715.** 2) $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18}$, $\frac{25\pi}{18}$. **716.** 2) $-\frac{\pi}{18}<x<\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}<x<\frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18}<x<\frac{25\pi}{18}$. **718.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<y<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **722.** 2) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 4) $\left[-2\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$. **723.** 2) $\sin\frac{13\pi}{7}>\sin\frac{11\pi}{7}$; 3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)>\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7>\sin 6$. **724.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **725.** 2) $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}\leqslant x\leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$. **726.** 2) $\sin\frac{9\pi}{8}>\cos\frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8}<\cos\frac{3\pi}{10}$. **727.** 2) $-\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9}$, $-\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$. **728.** 2) $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x<-\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9}<x<-\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9}<x<\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}<x<\frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}<x\leqslant\pi$. **730.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. **735.** 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}<\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$, $\operatorname{tg}1<\operatorname{tg}1{,}5$. **736.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **737.** 2) $-\pi\leqslant x<-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$; 4) $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}\leqslant x<2\pi$; **738.** 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **739.** 2) $-\operatorname{arctg}2+\pi$, $-\operatorname{arctg}2+2\pi$, $-\operatorname{arctg}2+3\pi$. **740.** 2) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leqslant\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\operatorname{arctg}5+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **741.** 2) $0\leqslant x<\operatorname{arctg}4$, $\frac{\pi}{2}<x<\operatorname{arctg}4+\pi$, $\frac{3\pi}{2}<x<\operatorname{arctg}4+2\pi$, $\frac{5\pi}{2}<x\leqslant 3\pi$; 4) $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg}3+\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg}3+2\pi<x<\frac{5\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg}3+3\pi<x\leqslant 3\pi$. **742.** 2) $-\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$. **743.** 2) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6}<x<-\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}<x<\pi$. **745.** 2) $y>1$; 4) $y>1$, $y<-1$. **749.** 2) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<$

$< \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. **750.** 1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$. **751.** 1) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) >$ $> \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **752.** 1) $\mathrm{arctg}\, 2\sqrt{3} < \mathrm{arctg}\, 3\sqrt{2}$; 2) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **753.** 2) $x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$; 4) $x = -3 - \sqrt{3}$. **754.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = -1$. **755.** 2) $x = 1$; 4) $x = 1$. **756.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; 3) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. **758.** 2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x \neq \pi n$, $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **759.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $5 \leqslant y \leqslant 7$; 6) $-4 \leqslant$ $\leqslant y \leqslant -2$. **760.** 2) Нечетная; 4) не является четной и нечетной. **761.** 2) 14π. **762.** 2) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$; 4) π, 3π. **763.** 2) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$; 4) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - 2\pi \leqslant$ $\leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$. **765.** 2) $\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. **766.** 2) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 4) 1 и -2. **767.** 2) Четная; 3) нечетная. **768.** 2) 4π. **770.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{2\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **771.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **772.** $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **774.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{4}$. **775.** 2) $\pi n <$ $< x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **776.** 2) $v_{\text{ср.}} = 3$. **777.** 2) $v_{\text{ср.}} = 2{,}2$. **778.** 2) $v(t) = -3$. **779.** 2) $v(4) = 0{,}25$, $v(8) = 0{,}25$. **780.** 2) $f'(x) = 5$, $f'(x) = -6x$. **781.** 2) $f'(x) = 4$; 3) $f'(x) = -5$. **782.** 2) $v(t) = 10t$. **783.** 2) $v(10) = 20$. **784.** $v_{\text{ср.}} = 1{,}5$; $v_{\text{ср.}} = 1$; $v_{\text{ср.}} = 0{,}5$. **785.** $v_{\text{ср.}} = \frac{1}{2}$, $v_{\text{ср.}} = 2$, $v_{\text{ср.}} = 2$. **787.** 2) $7x^6$; 4) $13x^{12}$. **788.** 2) $-3x^{-4}$; 4) $-7x^{-8}$. **789.** 2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{3}\, x^{\sqrt{3}-1}$. **790.** 1) $-\frac{9}{x^{10}}$; 3) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 5) $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$. **791.** 2) $-15(5x+2)^{-4}$; 4) $-20(2-5x)^3$; 6) $2500x^3$. **792.** 2) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **793.** 2) $-\frac{2}{27}$; 4) $\frac{1}{12}$; 6) $-\frac{3}{16}$. **795.** $y = x^3$. **796.** 2) $\frac{6}{(3-2x)^4}$; 4) $-\frac{4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}$; 6) $\frac{4}{3(1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$. **797.** 2) $x = \frac{8}{27}$. **798.** $\frac{1}{4}$. **799.** 2) $-\frac{2}{3}$, $\frac{7}{3}$. **801.** $2\frac{5}{6}$. **802.** 2) $2x - 1$; 4) $-34x$; 6) $1{,}5x^2$; 8) $16x$. **803.** 2) $10x + 6$; 4) $5x^4 - 6x$; 6) $-6x^2 + 18$; 8) $-9x^2 + 4x - 1$. **805.** 2) $3x^2 - \frac{2}{x^3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$. **806.** 2) $f'(0) = -2$, $f'(2) = 10$; 4) $f'(0) = 1$, $f'(2) = 5$.

807. 2) $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{9}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 4) $f'(3)=\frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1)=3$. **808.** 2) Нет; 4) да. **809.** 2) $x=1{,}5$; 4) $x_1=1$, $x_2=-\frac{7}{3}$; 6) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-4$. **810.** 1) $5x^4-4x^3+3x^2-2x$; 3) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. **811.** 2) 192; 4) 31,5. **812.** Да. **813.** $x_1=3$, $x_2=-0{,}4$, $x_3=1\frac{5}{11}$. **814.** 2) $\frac{2\sqrt{x}(x^2-2x-1)-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$. **815.** 1) 1; 2) $-\frac{5}{18}$. **816.** 2) $F(x)=\sqrt{\ln x}$. **817.** 2) $f(y)=\sin y$, $y=g(x)=x^2+1$. **818.** 1) $2x+1-\frac{16}{x^2}$; 2) $1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{x\sqrt[3]{x}}$. **819.** 1) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$; 2) $\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$. **820.** 2) $(x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$; 4) $\frac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. **821.** 2) $\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$; 3) $\frac{(x+2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. **822.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **823.** $x_1=0$, $x_2=-2$. **825.** 2) $-1<x<0$, $x>2$; 4) $x>1$. **826.** 2) $x\neq1{,}5$; 4) $x>0{,}5$. **827.** 3,5 рад/с. **828.** 902,5 Дж. **829.** 2) 103 г/см. **830.** $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. **831.** 2) e^x+2x; 4) $-3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **832.** 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; 4) $-e^{1\cdot x}-3x^{-4}$; 6) $6x^2e^{2x^3}$. **833.** 2) $3^x\ln x+2x^{-3}$; 4) $3e^{3x}+4x$; 5) $2x\cdot3^{x+2}\ln 3$. **834.** 2) $3^x\ln 3-2e^{2x}$; 4) $-e^{3-x}-\frac{4}{x^5}$. **835.** 2) $\frac{3}{x}-2^x\ln 2$; 4) $-9x^{-4}-\frac{1}{x\ln 3}$; 6) $\frac{3x(1+2\ln x)}{\ln 3}-\frac{2}{x\ln 3}$. **836.** 2) $-\sin x$; 4) $\cos x-2^x\ln 2$. **837.** 2) $-\sin(x+2)$; 3) $-\cos(3-x)$; 4) $-3x^2\sin x^3$. **838.** 2) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x\ln 2$; 3) $-12\sin 4x+\frac{1}{2x^2}$. **839.** 2) $\frac{3^x(\ln 3\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$; 4) $\frac{1}{x\ln 3}\cdot\sin 2x+2\log_3 x\cos 2x$. **840.** 2) 0; 4) $-\frac{1}{\ln 2}-3\ln 3$. **841.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=-0{,}5$; 6) $x=4$. **842.** 2) $x<0$; 4) $x>0$. **843.** 2) $-\frac{1}{2\sqrt{6-6x}}+\frac{10}{2-5x}$; 4) $-e^{\frac{2\cdot x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$. **844.** 1) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}}+\sin\frac{x-2}{3}$; 2) $-\frac{3}{2(x+2)\sqrt[4]{(x+2)^3}}-e^{\frac{x-4}{5}}$. **845.** 2) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(1-2x)e^{-x}$; 3) $2e^{3-2x}(\sin(3-2x)-\cos(3-2x))$. **846.** 2) $\frac{e^{\sqrt{3+x}}}{2\sqrt{3+x}}$; 4) $\mathrm{ctg}\,x$. **847.** 2) $0{,}5^{1+\sin x}\ln 0{,}5\cos x$; 4) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$. **848.** 2) $\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}\cdot x\ln 2}$. **849.** 2) $\frac{\sqrt{3}(1+3^x)-2x\sqrt{3}\,3^x\ln 3}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$;

4) $\frac{5^{2x}(2\ln 5 \sin 3x + 14\ln 5 - 3\cos 3x)}{(\sin 3x + 7)^2}$. **850.** 2) $\frac{1}{x^2 \ln 2}\left(x 2^x \ln 2 - \frac{1}{\ln 2} - 2^x + \log_2 x\right)$. **851.** 2) $\sin x + \cos x$. **852.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **853.** 2) 2. **854.** $2 + 2\pi$. **855.** 2) $f'(x) = 0$ при $x = e^{-1}$, $f'(x) > 0$ при $x > e^{-1}$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < e^{-1}$; 4) $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$. **856.** $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. Указание. Записать данную функцию при $x > 3$ в виде $\ln(x-3) + \ln(x-2)$, а при $x < 2$ в виде $\ln(3-x) + \ln(2-x)$. **857.** 2) $k = 1$, $b = 5$; 4) $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. **858.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3. **859.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **860.** 2) $y = -11x + 12$; 4) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$; 6) $y = x + 1$; 8) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. **862.** 1) $y = 1$; 2) $y = x$. **863.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$. **864.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **865.** 2) $y = 0$; 4) $y = 2x$. **866.** 2) (1; 2); 4) $(\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **867.** (0; –1), (4; 3). **868.** (1; –1), $y = 2x - 3$; (1; 0), $y = 2x - 2$. **869.** 2) $-5x^4 + 6x^2 - 6x$; 4) $-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $-21(4-3x)^6$; 8) $\frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$. **870.** 2) $-\sin x - \frac{1}{x}$; 4) $24x^3 - 9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4} + \frac{1}{2x}$. **871.** 2) $2e^{2x} - \frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3} + 3e^{1-3x}$. **872.** 2) $x^2(1 + 3\ln x)$; 4) $\sin 2x + 2x\cos 2x$; 6) $e^x(\cos x - \sin x)$. **873.** 2) $\frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$. **874.** 2) $-8^{\cos x}\ln 8 \sin x$; 4) $\frac{3}{x}$. **875.** 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = \frac{4}{9}$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{4}{9}$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и при $x > \frac{4}{9}$; 4) $f'(x) = 0$ при $x = 4$, $x = -3$ и $x = 1{,}2$, $f'(x) > 0$ при $x < -3$, $-3 < x < 1{,}2$, $x > 4$, $f'(x) < 0$ при $1{,}2 < x < 4$; 6) $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $0 < x < 1$. **876.** 2) e; 4) 0,5. **877.** 2) $y = 30x - 54$; 4) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **878.** $s(4) = 22$ м, $v(4) = 7$ м/с. **879.** 3) $3x^2\cos 2x - 2(x^3+1)\sin 2x$; 4) $\frac{1}{2}\sin x$; 6) $\frac{x^4-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 4x^3\sqrt[3]{x-1}$. **880.** 2) $\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x - 1}$. **881.** 2) $\frac{3\ln^2 x}{x\ln^3 2}$; 4) $-\sin 3^x \times 3^x \ln 3$. **883.** 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$; 4) $f'(x) > 0$ при $x > -\frac{1}{2}$; 6) $f'(x) = 0$ при $x = 3$, $f'(x) > 0$ при $x > 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$. **884.** $a \geqslant 3$. **885.** $a \leqslant -12$. **886.** 2) $a \leqslant 0$; 4) $a > 12$. **887.** 2) $a \geqslant 0$; 4) $a \leqslant 0$. **888.** 2) $\frac{\pi}{4}$. **889.** 2) $y = -\frac{1}{8}\ln 2x + \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y = (1 + e^{-1})x$. **890.** $y = 6x + \frac{19}{6}$, $y = 6x - 54$. **891.** 8 кв.ед. **892.** $2k$ кв.ед. **893.** При $p = 0{,}5$. **894.** (1; 0). **895.** $\frac{1}{e}$. **896.** $a = e^2$. **897.** $y = -1$ и $y = 2x - 6$.

898. $\frac{8}{3}$. **900.** 2) Возрастает на промежутке $x > 0{,}3$, убывает на промежутке $x < 0{,}3$; 4) возрастает на промежутке $x > -6$, убывает на промежутке $x < -6$; 6) возрастает на промежутках $-1 < x < 0$ и $x > 1$, убывает на промежутках $x < -1$ и $0 < x < 1$; 8) возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 4$, убывает на интервале $0 < x < 4$. **902.** 2) Убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$; 4) возрастает на промежутке $x > 5$. **903.** 2) Возрастает на промежутке $0 < x < 3{,}2$, убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 3{,}2$; 4) возрастает на промежутке $x < \frac{1}{3}$, убывает на промежутке $x > \frac{1}{3}$. **904.** 2) Возрастает на промежутке $x > \frac{1}{2}$, убывает на промежутке $x < \frac{1}{2}$. **905.** 2) Возрастает на интервалах $-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **907.** 2) $a > 1$. **908.** $a < \frac{1}{3}$. **909.** $a < -1{,}5$. **910.** $x_1 = -5$, $x_2 = 5$ — точки максимума, $x_3 = 3$ — точка минимума. **911.** $x_1 = -7$, $x_2 = -4$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$, $x_5 = -1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 3$, $x_8 = 4$. **912.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 4) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **913.** 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_3 = 0$; 4) $x_1 = -\frac{1}{2}$. **914.** 2) $x = -6$ — точка минимума; 4) $x = -8$ — точка максимума, $x = 8$ — точка минимума. **915.** 2) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 3$, $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума, $y(-2) = y(2) = -13$; 4) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,— точки максимума, $y\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ — точки минимума, $y\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **916.** 2) Нет; 4) да. **918.** 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$, $x_5 = 0$; 4) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$. **919.** 2) Точек экстремума нет; 4) точек экстремума нет. **920.** 2) $x = -1$ — точка максимума, $y(-1) = 0{,}25$, $x = 0$, $x = 4$ — точки минимума, $y(0) = 0$, $y(4) = 10\frac{2}{3}$; 4) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,— точки максимума, $y\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,— точки минимума, $y\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **922.** Если n — нечетное число, то $x = n - 1$ — точка максимума; если n — четное число, то $x = n - 1$ — точка максимума, $x = -1$ — точка минимума. **929.** $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$, $x_5 = 6$. **934.** 2) 2. **935.** Один корень при $c < \frac{4}{9}$, $c > 4$, два корня при $c = \frac{4}{9}$, $c = 1$, $c = 4$, три корня при $\frac{4}{9} < c < 1$, $1 < c < 4$. *Указание.* Дополнительно к общему исследованию функции сравнить значения функции с числом 1. **936.** б) Наибольшее значение функции равно 3, наименьшее значение функции равно –3; г) наибольшее значение функции равно 4, наименьшее значение функции равно –2. **937.** 2) Наибольшее значение равно 68, наименьшее значение равно –31. **938.** 2) Наибольшее значение равно –2, наименьшее равно –2,5; 3) наибольшее значение равно –1, наименьшее равно $-\sqrt{2}$. **939.** 2) Наибольшее

значение равно –3. **940.** 25 + 25. **941.** 25 · 25. **942.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **943.** Квадрат со стороной 3 см. **944.** 2) Наибольшее значение равно $2 + e^{-2}$, наименьшее равно 1; 3) наибольшее значение равно 1,5, наименьшее равно –3. **945.** 2) 1. **946.** 2) 1. **947.** 2) 3; 4) 1. **948.** $\frac{a}{6}$. **949.** $x = a$. **950.** 4. **951.** (1; 1). **952.** $\frac{2}{3}\pi$. **953.** 2) $(6x - x^3)\sin x + 6x^2\cos x$; 4) $12x^2 - 18x$. **954.** 2) Выпукла вниз на интервалах $x < -1$ и $x > 1$, выпукла вверх на интервале $-1 < x < 1$; 4) выпукла вверх на интервале $0 < x < 1$, выпукла вниз на интервале $x > 1$. **955.** 2) 2; 4) $\arccos\frac{1}{4}$. **956.** 2) Возрастает на промежутках $x < -1$ и $x > 2$, убывает на интервале $-1 < x < 2$; 4) убывает на промежутках $x < 3$ и $x > 3$. **957.** 2) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 0{,}5$; 4) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **958.** 2) $x = 1$ — точка минимума. **959.** 2) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = -3$, $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = -12{,}6$. **962.** 2) Наибольшее значение равно 0, наименьшее значение равно –4; 4) наибольшее значение равно 14, наименьшее равно –11. **964.** Равносторонний треугольник со стороной $\frac{p}{3}$. **965.** Куб с ребром 10 см. **968.** 2) $x = -1$ — точка минимума; 3) $x = -3$ — точка максимума, $x = 4{,}5$ — точка минимума. **969.** 1) Функция возрастает при $-10 < x < -8$, $-4 < x < -2$, $0 < x < 4$, $6 < x < 7$, функция убывает при $-8 < x < -4$, $-2 < x < 0$, $4 < x < 6$; 2) $x_1 = -8$, $x_2 = -4$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4$, $x_6 = 6$, 3) $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. **971.** 2) Наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, наименьшее равно $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **972.** 12. **973.** Катеты $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $\frac{2l}{3}$. **974.** 20 и 20. **975.** $\frac{a^2}{2}$. **976.** R^2. **977.** 16. **978.** $\frac{\pi p^2}{216}$. **979.** $2\sqrt{\frac{S}{15}}$. **980.** $x = -\sqrt{2}$ — точка максимума, $x = \sqrt{2}$ — точка минимума. **982.** arctg k. **985.** 2) $\frac{x^4}{4} + C$; 4) $2\sqrt{x} + C$. **986.** 1) $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$. **988.** 2) $x^5 + \frac{x^4}{2}$; 4) $-\frac{1}{x^2} - 3\ln x$; 5) $2x^3 - 2x^2 + 3x$; 6) $3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$. **989.** 2) $2\sin x - 5\cos x$; 4) $3e^x + \cos x$; 6) $x + 3e^x - 4\sin x$; 8) $8\sqrt{x} + 3\ln x - 2e^{-x}$. **990.** 2) $\frac{1}{4}(x-2)^4$; 4) $\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$; 6) $3\ln(x-3) + 2\cos(x-1)$. **991.** 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$; 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4} + 5\right) + C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + C$; 8) $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$. **992.** 2) $2x^2 - x$; 4) $\frac{1}{3}\sin 3x$. **993.** 2) $4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $-10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x-\frac{1}{3}}$; 4) $21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$; 5) $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2)$; 6) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2}\ln(2x-5)$.

994. 2) $\frac{3x^4-3x^2+4x}{10}$; 4) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$. **995.** 2) $\left(\frac{9}{7}x-\frac{3}{2}\right)x\sqrt[3]{x}$; 4) $\left(\frac{1}{3}x-3\right)\times$ $\times 2\sqrt{x}$. **996.** 2) $\frac{1}{2}\cos 2x$. **997.** $6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2{,}8$. **998.** 2) $\ln(x+2)$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x$. **1000.** 2) $12\frac{1}{3}$; 4) 6; 6) $\frac{1}{2}$. **1001.** 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$. **1002.** 2) $12\frac{2}{3}$. **1003.** 2) 18. **1004.** 2) 9; 4) 5; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **1005.** 2) 1; 4) 2; 6) 0. **1006.** 2) 11; 4) $2\frac{2}{3}$; 5) 10. **1007.** 2) 68; 3) e^6-e^2. **1008.** 2) $-\frac{11}{12}$; 4) 5. **1009.** 2) $4\sqrt{3}$; 3) 8. **1010.** 2) $\frac{4}{3}\ln 2{,}5$; 3) 0,5. **1011.** 1) π; 2) 0,5; 3) 0,5; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $16\frac{16}{105}$; 6) $1{,}5+\ln 2$. **1012.** $b=2$. **1013.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $2\ln 4$. **1014.** 2) $6\frac{1}{6}$; 4) 4. **1015.** 2) $\frac{11}{12}$. **1016.** 2) $1\frac{1}{3}$. **1017.** 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$. **1018.** 2) 8. **1019.** 2) $2-\sqrt{2}$. **1020.** 2) 4,5. **1021.** 2) $\frac{\pi}{2}-1$. **1022.** 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) 6,75. **1023.** 1) 18; 2) $\ln 2-\frac{5}{8}$. **1024.** (0,5; 1,25). **1025.** 2) $21\frac{1}{3}$ м. **1026.** $10\frac{2}{3}$ м. **1027.** 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin 2x+C$; 6) $y=\sin x+\cos x+C$. **1028.** 2) $y=2\sin x+1$; 4) $y=2x+x^2-x^3+2$; 6) $y=3-e^{-x}$. **1030.** $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ лет. **1031.** 0,09 Дж. **1032.** 0,96 Дж. **1033.** 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. **1034.** 2) 12; 4) -2; 6) $\frac{3}{8}$; 7) 2. **1035.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$. **1036.** 2) 0; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. **1037.** 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $2\sin 12$. **1038.** 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. **1039.** 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. **1040.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3$. **1041.** 1) 1,75; 2) $3\frac{8}{15}$. **1042.** $k=p$.

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа

1043. 0,08. **1044.** 30. **1045.** $3\frac{1}{3}$. **1046.** 400%. **1047.** 45. **1048.** 13,5. **1049.** 62%. **1050.** 30%, 10%, 60%. **1051.** 3650 р. **1052.** 21%. **1053.** 8. **1054.** 600. **1055.** 636 р. 54 к., 655 р. 64 к. **1056.** 408 р. 85 к. **1057.** 2) 1,02. **1058.** 2) 2. **1059.** 2) 0,5; 3) 20,8. **1060.** 1083. **1061.** 2) 3. **1062.** 2) 0. **1063.** 2) 64. **1064.** 2) 160. **1065.** 2) $(0{,}2)^{\frac{2}{3}}>(0{,}2)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}<\log_{0,3}\frac{3}{4}$. **1066.** 2) $0<a<1$; 4) $0<a<1$; 6) $a>1$. **1067.** 2) Первое. **1068.** 2) $3<\log_2 10<4$. **1069.** 2) 0. **1070.** 2) $|b|\cdot(2b^2+1)$. **1071.** 2) $3(\sqrt{6}-\sqrt{5})$; 4) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$. **1072.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. **1073.** 2) $2\frac{7}{9}$; 4) $1\frac{4}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. **1074.** 2) 2,(1); 4) 5,(18). **1075.** 2) Да. **1078.** 2) Имеют; 4) не имеют.

1080. 2) $2\arcsin\frac{9}{16}\approx 68{,}5°$. **1081.** $120\ \mathrm{tg}\ 36°\approx 87$ м. **1082.** $130\,(\mathrm{tg}\ 22° + \mathrm{tg}\ 44°)\approx 178$ м. **1083.** 2) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{5}{12}$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{24}{7}$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$. **1084.** $\frac{7}{9}$. **1085.** $-0{,}5$. **1086.** 2) 4π. **1087.** 2) $-\frac{3}{4}$. **1088.** 2) 0; 4) -1; 5) 0. **1089.** 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **1090.** 2) 1. **1091.** 2) $-\frac{4}{9}$. **1092.** 2) $\frac{b-4}{2b}$. **1093.** 2) 0. **1094.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1095.** 2) 4,8. **1096.** 2) $1+\sqrt{m}$. **1097.** 2) $\sqrt{a}-1$. **1098.** 2) $1-\sqrt{b}$. **1099.** $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **1100.** 2) $\frac{1}{ab}$. **1101.** $16a^2$. **1102.** $-6\sqrt{b}$. **1103.** 2) 2. **1105.** 2) $2\cos^2\alpha$. **1106.** $-\mathrm{tg}\,2\alpha$. **1108.** 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. **1110.** 2) $\frac{3}{8}$. **1111.** 7. **1112.** 2) 0. **1113.** 2) 2; 4) $\sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\,\alpha$. **1114.** 2) $\mathrm{tg}\,\alpha$. **1115.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) 4. **1116.** 2) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **1117.** 2) $-\sin\alpha-\cos\alpha$. **1119.** $\frac{5}{\cos 2\alpha}$. **1120.** $\cos^2 x$. **1121.** 2) $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. **1122.** 2) $2\cos\alpha$. **1123.** 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,3\alpha$. **1124.** 2) $1+\frac{1}{\cos x}$. **1125.** $1\frac{5}{7}$. **1126.** $-\frac{1}{2}$. **1136.** 2) $x=8$. **1137.** $a=-6$. **1138.** $b=3$. **1139.** 2) $x=3$. **1140.** 2) $x=5$. **1141.** 2) $x=\frac{1}{a-b}$. **1142.** 2) $x_1=-2$, $x_2=\frac{2}{3}$. **1143.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$. **1144.** 2) $x=3$. **1145.** 2) Корней нет. **1146.** $x=2$. **1147.** 2) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. **1148.** 1) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1149.** 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=-1$, $x_4=3$. **1150.** 1) $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm b$; 2) $x_1=a$, $x_2=-2{,}5a$. **1151.** $a>0$, $b^2=4ac$. **1153.** 2) $x=6$; 3) $x=3\frac{2}{3}$. **1154.** 2) $x_1=3$, $x_2=\frac{5}{3}$. **1155.** $x=3$. **1156.** $x=5$. **1157.** 2) Корней нет. **1158.** 2) $x_1=3$, $x_2=2$; 3) $x_1=3$, $x_2=-1$. **1159.** 2) $x=3$. **1160.** 2) $x_1=4$, $x_2=-2$. **1161.** 2) $x_1=1$; 3) $x=-\frac{3}{8}$. **1162.** 2) $x=9$. **1163.** 2) $x=1$; 4) $x=0$. **1164.** 2) $x=3$. **1165.** 2) $x_1=3$, $x_2=243$. **1166.** 2) $x=3{,}5$. **1167.** 2) $x=\sqrt{3}$. **1168.** 2) $x_1=1$, $x_2=9$. **1169.** 2) $x=9$. **1170.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$; 4) $x_1=1$, $x_2=4$. **1171.** 2) $x=-3$. **1172.** 2) $x_1=-1$, $x_2=3$; 3) $x=0$. **1173.** 2) $x_1=100$, $x_2=0{,}1$, 4) $x=0$. **1174.** Нет. **1175.** 2) $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$. **1177.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **1178.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in \mathbf{Z}$; 3) $x=-\mathrm{arctg}\ 2{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **1179.** 1) Корней нет; 2) корней нет. **1180.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\mathrm{arctg}\ 3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **1181.** 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1182.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1183.** 2) $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1184.** 2) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1185.** 2) $x=\pm\frac{\pi n}{2}+\frac{3\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1186.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1187.** 2) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1188.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1189.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1190.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1191.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1192.** 2) Корней нет. **1193.** 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1194.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1195.** 2) $x=\frac{\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1196.** 2) $x=\frac{\pi n}{8}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1197.** 2) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1198.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1199.** 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1200.** 2) Корней нет; 4) $x=\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1202.** 2) $x>-2$. **1203.** 2) $x\geqslant 5$. **1204.** 2) $-3\frac{1}{3}<x<40$; 4) $-2<x<8$. **1205.** 1) $x<\frac{2}{3}$, $x>\frac{3}{2}$; 2) $x<-\frac{2}{9}$, $x>\frac{5}{2}$; 3) $x<2\frac{4}{7}$. **1206.** 1) $-16<x<3$; 2) $x<4$, $x>6$; 3) $x<-3$, $x\geqslant -2{,}5$. **1207.** 2) $-1{,}4\leqslant x\leqslant 0$. **1208.** 2) $x>-4$. **1209.** 1) $-7<x<2$, $x\geqslant 5$; 2) $x<-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}<x<1$; 3) $x<-4$, $-1<x<2$, $x>3$. **1210.** $-5\leqslant x\leqslant -3$. **1211.** $m=2$. **1212.** $m=8$, $m=9$. **1213.** $x=6$. **1214.** $x=-1$. **1215.** 2) $x<-2$; 4) $x<2$, $1<x<2$, $x>5$, 6) $\frac{1-\sqrt{73}}{6}<x<-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}<x<1$, $1<x<\frac{1+\sqrt{73}}{6}$. **1216.** 2) $x\leqslant 3$; 4) $x<-\frac{1}{8}$. **1217.** 2) $-1<x<5$. **1218.** 2) $3-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{2}$. **1219.** 2) $x<1$. **1220.** 2) Решений нет. **1221.** 2) $x\in \boldsymbol{R}$; 3) $x<3$; 5) $x\leqslant 1-\frac{1}{3}\log_3 5$. **1222.** 2) $x<1$, $x>3$. **1223.** 2) $-\sqrt{5}\leqslant x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{5}$. **1224.** 2) $x>3$. **1225.** 2) $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$. **1226.** 2) $-1\leqslant x<1$, $3<x\leqslant 5$. **1227.** 2) $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. **1228.** 2) $0<x<\frac{1}{3}$, $x>1$. **1229.** 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}<x<10$. **1230.** 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1231.** 2) $-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<x<\arcsin\frac{1}{4}+\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<x<\arccos\frac{1}{3}-2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **1232.** 2) $-3\pi\leqslant x\leqslant -\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}\leqslant x\leqslant -\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \pi$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-3\pi<$

$< x < -\frac{5\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 2\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.
1236. 1) (2; 1); 2) (5; –3). **1237.** 1) (–1200; 500); 2) (7; 1). **1238.** 2) (–8; –2), (8; 2); 3) (8; 4), (–8; –4). **1239.** 1) (7; 6); 2) (2; 3), $\left(-9;\ 28\frac{2}{3}\right)$. **1240.** 2) (3; 1), (–3; –1); 4) (3; –5), (3; 5), $(4; 2\sqrt{2})$, $(4; -2\sqrt{2})$. **1241.** 2) (4; 1); 4) (10; 1000), (1000; 10). **1242.** 2) $(\sqrt{8};\ \sqrt[4]{8})$. **1243.** 2) (100; 81). **1244.** 2) (0; 1). **1245.** 2) $\left(\pi n;\ (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\left((-1)^n \arcsin\frac{5}{7} + \pi n;\ (-1)^{m-1} \times \times \arcsin\frac{3}{14} + \pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1246.** 2) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(k+m);\ \frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+m);\ -\frac{\pi}{6} + \pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **1247.** 2,12. **1248.** $x > 5$.
1249. 1 мин. **1250.** 126 км. **1251.** 1080 км. **1252.** 16 дн. **1253.** 91 га. **1254.** 8, 12. **1255.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. **1256.** 432 детали. **1257.** 18 км/ч. **1258.** 25 и 20 билетов или 20 и 15 билетов. **1259.** 3 км/ч. **1260.** 21 ц, 20 ц. **1261.** 1400 шагов. **1262.** 3, –6, 12, –24. **1263.** 27. **1264.** 1, 3, 9, 15 или 16, 8, 4, 0. **1265.** 2 или $12\frac{2}{5}$. **1266.** В 3 раза. **1267.** 16 см^2. **1268.** $b = -2$.
1269. $k = -1$. **1270.** 2) $k = -1$, $b = 3$; 4) $k = 0$, $b = -2$. **1271.** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$, $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$. **1272.** 2) Нет; 4) да. **1273.** 2) $3\frac{1}{3}$. **1274.** 2) $x < \frac{1}{3}$. **1275.** 2) $x > 0{,}5$.
1276. $x > 1$. **1277.** $x < -\sqrt{3}$. **1280.** 2) Да. **1281.** 2) (–1; 3), (5; 3). **1282.** 4) $x < -2$, $x > 2$. **1283.** 4) $x \neq 0$. **1285.** 2) Нечетная; 4) четная. **1286.** 2) Нечетная; 4) четная. **1287.** 2) Четная; 4) не является четной и не является нечетной. **1288.** 2) $\frac{10\pi}{3}$. **1289.** 2) 10π; 4) 2π. **1291.** 2,25.
1292. 2) 3 и –2. **1293.** 2) (0; 2), (2; 0), (0,5; 0). **1299.** 2) $x > -2$; 4) $x \neq 2\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1300.** 2) $x \leqslant -7$, $x > 6$. **1301.** 2) $3 < x \leqslant 3\frac{1}{2}$.
1302. 2) $-\sqrt{10} \leqslant x < -3$, $3 < x \leqslant \sqrt{10}$. **1303.** 2) $y \leqslant 7$; 4) $y \neq 2$. **1304.** 2) $-\sqrt{1{,}25} \leqslant \leqslant y \leqslant \sqrt{1{,}25}$. **1305.** 2) –3. **1306.** 2) $\frac{\pi}{3}$. **1307.** 2) $y = -6x - 1$. **1308.** –1.
1309. 9. **1310.** (3; 9). **1311.** (1; 2), (0,5; 2,25). **1312.** (–1; –3). **1313.** 2) $y = 0{,}5\,(1 + \ln 2 - x \ln 2)$. **1314.** $\frac{\pi}{4}$. **1315.** e^{-1}. **1316.** $-\frac{\pi}{4}$. **1317.** $y = x + 1$.
1318. $y = 3x - 3$. **1319.** 2) Возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 0$. **1320.** 2) $x = 6$ — точка минимума. **1321.** 2) $x = 2$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума. **1322.** 2) 1,5 и 1. **1323.** 2) 3 и 1. **1324.** 2) 0,5 и 0. **1325.** 1 дм. **1326.** 54π см^3. **1327.** 6. **1328.** 2. **1329.** $\sin x - \frac{1}{x} - 1$.
1330. 132, –57. **1331.** 9, 4. **1332.** (1; 1). **1333.** $\frac{49}{27}$. **1334.** $4\sqrt{2}$.
1335. $p = -10$, $q = 26$. **1336.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. **1337.** $3\sqrt[3]{3\pi v^2}$. **1338.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

1339. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1340.** $\frac{4R}{3}$. **1341.** $\frac{\pi}{3}$. **1342.** $\frac{\pi p^3}{216}$. **1343.** $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H = R\frac{2}{\sqrt{3}}$. **1344.** $R = H$. **1345.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1346.** $r = \frac{2R}{3}$, $h = \frac{H}{3}$. **1347.** 2) $x = 0$ — точка минимума, $x = 0{,}4$ — точка максимума. **1348.** (1; 0), (–1; 4). **1349.** $y = 7x - 43$. **1353.** 2) ln 2. **1354.** 2) $9\frac{1}{3}$; 4) 1. **1355.** 2) 4,5. **1356.** 2) $\frac{5}{12}$. **1357.** 2) $\frac{8}{3\ln 3}$. **1358.** 3) $3\frac{1}{9}$; 4) –2. **1359.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{1}{3}$. **1361.** $-2 < x < 3$. **1362.** $v(10) = 262$ м/с, $t \approx 37$ с. **1363.** 12π. **1364.** 2) $5x^{-\frac{1}{6}}$. **1365.** 2) $\frac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$. **1366.** 2) $\frac{2x(4x+3)}{3\sqrt[3]{x+1}}$; 4) $\cos 2x - 2x\sin 2x$. **1367.** $x = 2$. **1368.** 2) $f'(2) > 0$. **1369.** $f'(0) = 4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8(7+4\sqrt{3})$. **1370.** $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 0$. **1371.** $\frac{1}{8}(2\sin 4x - 9)$. **1372.** $\frac{3}{4}\ln|4x-1| + C$. **1373.** 1) 11,25; 2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$; 3) 5,5 + 7 ln 2. **1374.** 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) ln 3. **1375.** 2) $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$; 4) $10\frac{2}{3}$; 6) $a = 3$. **1376.** 2) $\frac{4}{9}$; 4) 36; 6) $a \geqslant 1$. **1377.** 2) $y = -5x - 3$; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) 2. **1378.** 2) (3; e); 4) $-5 < x \leqslant -4$, $x \geqslant 3$; 6) $\pm\sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36}}$. **1379.** 2) $x < -4$, $-\frac{1}{8} < x < 0$; 4) $546\frac{3}{4}$; 6) $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$. **1380.** 2) $\frac{2}{5\ln 10}$; 4) $y \leqslant -\frac{19}{12}$; 6) (1,15; –2,1).

Задачи для внеклассной работы

1381. 2) $x \geqslant 3$. Указание. Ввести обозначение $y = \sqrt[3]{8-x}$, $z = \sqrt[3]{27+x}$, откуда $y^3 + z^3 = 35$ (1). Исходное уравнение записать так: $y^2 - yz + z^2 = 7$ (2). Поделив уравнение (1) на (2), получить $y + z = 5$ (3). Решая систему уравнений (2), (3), найти значение y и далее использовать введенные обозначения; 4) $x_1 = 73$, $x_2 = -8$. **1382.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. **1383.** 2) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_3 = 3$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. **1384.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1385.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1386.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1387.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1388.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **1389.** $x_3 = 3$. **1390.** 1) $(a; a^2)$, $(a^2; a)$, если $a > 0$ и $a \neq 1$; $(-a-1; (a+1)^2)$, $((a+1)^2; -a-1)$, если $a < -1$ и $a \neq -2$. **1391.** При $a \neq 3$ нет решений, при $a = 3$ — (0; 1). Указание. Записать второе уравнение системы в виде $x^2 + (y-1)^2 + (a-3)^2 + 1 - \cos(xy) = 0$. **1392.** 2) (1; 1), (2; 4); 4) $\left(-\frac{1}{6} + n;\right.$

$\frac{1}{6}+n\Big)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\left((-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi n;\ (-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k+\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **1393.** $\left(-\frac{\pi}{4}+(-1)^k \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+(-1)^{k-1} \frac{\pi}{12}-\right.$ $\left.-\frac{\pi k}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Указание. Решить систему как линейную относительно u и v, где $u=\cos x \cos y$, $v=\sin x \sin y$. **1394.** $\left(7^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}};\ 5^{(\log_5 3 \log_7 2)^{\frac{1}{3}}}\right)$. **1395.** 2) $x>0{,}01$. **1396.** $-\frac{3}{2}<x<-1$, $-\frac{1}{2}<x<0$. **1397.** $x<-4$, $-3<x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$. **1398.** 2) $2<x\leqslant 3$. **1399.** $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{3}$, $x=\frac{10}{3}$, $4<x\leqslant 5$. **1400.** Если $a<\frac{3}{4}$, то решений нет; если $a=\frac{3}{4}$, то $x=\frac{15}{4}$; если $a>\frac{3}{4}$, то $a+3<x<9a-3$. Решения первого неравенства являются решениями второго при $\frac{3}{4}\leqslant a<\frac{8}{9}$. **1406.** 2) $\frac{12}{13}$. **1407.** $C=\frac{\pi}{2}$. **1408.** $b>\sqrt{3}-1$, $b<-3-\sqrt{3}$. **1409.** $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1410.** $\frac{2}{5}$. **1411.** 3 или 12. **1412.** Нет, так как наименьшее расстояние между кораблями будет равно 3 милям через 48 мин. **1413.** $a=6$, $b=-11$, $c=6$. Указание. Так как точки A и B симметричны относительно прямой $x=2$, то $A\,(x_1;\ y_0)$, $B\,(x_2;\ y_0)$, где $x_1=2-t$, $x_2=2+t$, $t>0$. Из условия $f'(x_1)=f'(x_2)$ следует, что $a=6$ и $f'(x_1)=f'(x_2)=-3t^2+12+b$, а равенство $f(x_1)=f(x_2)$ можно записать в виде $b=t^2-12$ (так как $t>0$), откуда $f'(x_1)=f'(x_2)=-2t^2<0$. **1414.** $a=6$, $b=11$, $c=5$. **1415.** $a=-4$, $b=5$, $c=-2$. Указание. а) Если $a<\frac{3}{4}$, то решений нет; если $a=\frac{3}{4}$, то $x=\frac{15}{4}$; если $a>\frac{3}{4}$, то $a+3<x<$ $<9a-3$; б) решения первого неравенства являются решениями второго при $\frac{3}{4}\leqslant a<\frac{8}{9}$. **1416.** $a=4$, $b=-5$, $c=2$. **1417.** $1\frac{1}{8}$. **1418.** $a=1$, $s=4$. **1419.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$. **1420.** 2) $x=\frac{1}{2}$; $x=-\frac{8}{3}$. **1421.** $x=9$. **1422.** 2) $x=2$; 4) $x=4$. **1423.** 2) $x=-9$. **1424.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\geqslant 3$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1425.** 2) $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+(2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1426.** $x=\frac{1}{2}\left((-1)^n \times\right.$ $\left.\times\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1427.** $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1428.** $x=\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+$ $+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1429.** $x=\frac{\pi}{3}$. **1430.** Если $\frac{1}{8}\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\left(4\sqrt{2\,(1+a)}-7\right)+$ $+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1431.** 1) $(1;\ 2)$, $\left(-4;\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $(-2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(2;\ 1)$. **1432.** 1) $(1;\ \log_3 2)$; 2) $(3;\ -9)$. **1433.** 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **1435.** 1) $-1<x<0$, $2<x<4$; 2) $-2\leqslant$

$\leqslant x < -1$, $x > -1$. **1436.** 1) $a \geqslant \frac{10}{3}$; 2) $a \leqslant \frac{1}{3}$. **1437.** 1) $x < 2$, $x > 3$; 2) $x > 3$. **1438.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $-311 < x < -11$, $1 < x < 1{,}5$. **1439.** 1) $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$; 2) $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $0 < x < 1$. **1440.** $x \leqslant -4$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 5$. **1441.** $a < \sqrt{2}$. **1442.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{9}\right)$. **1443.** $(-2; 22)$, $(2; 10)$. **1444.** $k = 2$. **1445.** $p = -2$, $q = 0$, $d = 1$. **1446.** 2,25. **1447.** $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1448.** $a = -3{,}5$. **1449.** $a = 1 - \sqrt{2}$, $a = 5 + \sqrt{10}$. **1450.** $a < -4$, $-\frac{5}{4} < a < 0$. **1451.** $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{15}$.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. **1.** 1) 135; 2) $5\frac{11}{48}$; 3) $4\frac{1}{2}$. **2.** 1) $\frac{a^2 b}{c}$; 2) a^{1}. **3.** $\frac{a^{\frac{3}{4}} - 3a^{\frac{1}{2}}}{7}$. **4.** $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{9}\right)^3} < \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$. **5.** $2\sqrt[3]{ab}$.

Глава II. **1.** 1) $x \neq 1$; 2) $x \geqslant 4$, $x \leqslant -1$. **2.** 1) x — любое действительное число, $y > 0$ при $x > -1$; 2) $x \neq 0$, $y > 0$ при $x \neq 0$; 3) x — любое действительное число. **3.** 1) $x = 128$; 2) $x = 1$.

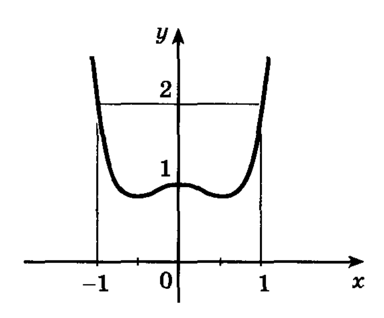
Глава III. **2.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; $5^{0,2} > 5^{1,2}$. **3.** 1) $x = 2$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 3) $x = 1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **4.** 1) $x > 4$; 2) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Глава IV. **1.** 3; -2; 3; 49; 2. **3.** 1) $\log_{0,2} 3 < \log_{0,2} 25$; 2) $\log_2 0{,}7 < \log_2 1{,}2$. **4.** 1) $x = 8$; 2) $x = 1$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$. **5.** $(15; 5)$. **6.** 1) $1 < x \leqslant 10$; 2) $-3 < x < 2$.

Глава V. **1.** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. **2.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 1) $\sin\alpha \cos\beta$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\cos(\alpha - \beta)$.

Глава VI. **1.** 1) 0; 2) 0. **2.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x = \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Глава VII. **1.** $x \neq \frac{\pi}{8}(1 + 2n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; нет. **2.** $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $\cos x = 1$ при $x = 0$, 2π; $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$; $\cos x = -1$ при $x = -\pi$, π; $\sin x = 0$ при $x = 0$, π, 2π; $\cos x = 0$ при $x = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$; $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi$; $\cos x > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; $\sin x < 0$ при $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$; $\cos x < 0$ при $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$; возрастают: $\sin x$ при



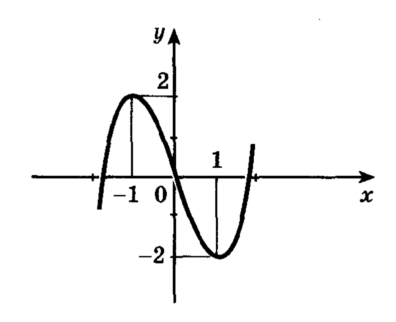


Рис. 170

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, $\cos x$ при $-\pi < x < 0$, $\pi < x < 2\pi$; убывают: $\sin x$ при $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, $\cos x$ при $0 < x < \pi$. **3.** $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = -\pi$, 0; $\operatorname{tg} x > 0$ при $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg} x = 0$ при $-\frac{3}{2}\pi < x < -\pi$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.
4. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Глава VIII. **1.** 85. **2.** 1) $-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - e^x$; 2) $12\,(3x - 5)^3$, 3) $6 \cos 2x \cos x - 3 \sin 2x \sin x$; $\frac{x^4 + 15x^2}{(x^2 + 5)^2}$. **3.** $k = -3$. **4.** $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Глава IX. **1.** Возрастает при $-1 < x < 1$, убывает при $x < -1$, $x > 1$. **2.** Точка максимума $(-3; -2)$; точка минимума $(3; 2)$. **3.** См. рис. 170. **4.** Наибольшее $y(5) = 5\frac{4}{5}$, наименьшее $y(2) = 4$. **5.** 2 м.

Глава X. **2.** $F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$. **3.** 1) $11\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) −1. **4.** 1) $20\frac{5}{6}$ кв. ед.; 2) 36 кв. ед.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Федорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10—11 классов общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *В. А. Андрианов, И. П. Ткаченко, Е. В. Соганова*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технический редактор *О. Е. Иванова*
Корректор *Е. Г. Терскова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 23.07.07. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 20,03 + 0,47 форз. Доп. тираж 50 000 экз. Заказ № 1457.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы имени 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.